



**KTO KARATAY ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

ÇİFT TERS SARKAÇ DİNAMİK MODELLEMESİ VE KONTROLÜ

Mürvet Şeyma GÖREN

Yüksek Lisans Tezi

**KONYA
Temmuz 2022**

ÇİFT TERS SARKAÇ DİNAMİK MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

Mürvet Şeyma GÖREN

KTO Karatay Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Mekatronik Mühendisliği Tezli Yüksek Lisans Programı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin Alp

Konya
Temmuz 2022

BİLDİRİM

Enstitü tarafından onaylanan Yüksek Lisans tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını basılı veya dijital biçimde arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullar dahilinde erişime açma iznini KTO Karatay Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle, Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak ve gelecekteki çalışmalar (makale, kitap, lisans, patent vb.) için tezimin tamamının veya bir bölümünün kullanım hakları yalnızca bana ait olacaktır.

Tezimin bütünüyle kendi çalışmam olduğumu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izinle kullanılması zorunlu olan kaynakları, yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde izinlerin suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayımlanan “Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge” kapsamında, tezim, aşağıda belirtilen koşullar haricince, YÖK Ulusal Tez Merkezi ve KTO Karatay Üniversitesi Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

Enstitü / Fakülte Yönetim Kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.¹

Enstitü / Fakülte Yönetim Kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 6 ay ertelenmiştir.²

Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir.³⁴

25 Temmuz 2022

Mürvet Şeyma GÖREN

¹ MADDE 6(1) Lisansüstü tezle ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.

² MADDE 6(2) Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internette paylaşılması durumunda 3. şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ayı aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.

³ MADDE 7(1) Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.

⁴ MADDE 7(2) Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

ETİK BEYAN

KTO Karatay Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Hazırlama ve Yazım Kurallarına uygun olarak Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALP danışmanlığında tarafımdan üretilen bu tez çalışmasında; sunduğum tüm veri, enformasyon, bilgi ve belgeleri bilimsel etik kuralları çerçevesinde elde ettiğimi, tüm değerlendirme, analiz, bulgu ve sonuçları bilimsel usullere uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım kaynakların tümüne bilimsel normlara uygun biçimde atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, tezimin kaynak gösterilen durumlar dışında özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarımı kabullendiğimi beyan ederim.

25 Temmuz 2022

Mürvet Şeyma GÖREN

Tüm sevdiklerime...

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamda bana yol gösteren değerli danıőman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALP'e,

İhtiyacım olan zamanlarda desteklerini ve fikirlerini eksik etmeyen değerli mesai arkadaşlarım Arő Gör. Sinan İLGEN, Arő Gör. Gökberk AY ve Arő Gör. Emre OFLAZ'a,

Ayrıca aldığım her kararda yanımda olan ve yaşadığım müddetçe yanımda olacaklarına inandığım aileme, özellikle hayat öğretmenim olarak gördüğüm rahmetli Alper ağabeyime,

Yürekten teşekkür ederim.

25 Temmuz 2022

Mürvet Şeyma GÖREN

ÖZET

Mürvet Şeyma GÖREN

Çift Ters Sarkaç Dinamik Modellemesi ve Kontrolü

Yüksek Lisans

Konya, 2022

Ters sarkaçlar lineer olmayan, kararsız sistemlerdir ve kontrol teorisinin klasik çalışma alanıdır. Ters sarkaç, kütle merkezi dönme noktasının üzerinde olan kararsız ve ek yardım olmadan düşen bir sarkaçtır. Ters konumda olan bu sarkaçlar dirseğin açısını kontrol sistemi ile izlenir ve dengede tutmak için kontrol sistemiyle birlikte yatay kuvvet uygulanmaktadır. Bu tez çalışmasında araç üzeri ters sarkaç sisteminin matematiksel modelleme teorisi literatürde çıkarılmıştır. Multibody Dynamics'te sanal modelleme işlemi yapılmıştır. Daha sonra bu modellemesi yapılan araca 3 ayrı kontrolcü Matlab-Simulink'te eklenmiştir; bunlar LQR, PD ve Bulanık-LQR. Bu kontrolcülerin performans karşılaştırmaları görsel grafiklerle yapılmıştır. Yapılan bu karşılaştırmalara göre Bulanık-LQR kontrolcününün bu tez kapsamında kullanılan diğer kontrolcülere göre daha kullanılabilir olduğu saptanmıştır.

Anahtar Kelimeler

Çift Ters Sarkaç, Bulanık-LQR Kontrol, LQR Kontrol, PD Kontrol, Simülasyon, Çift Ters Sarkaç Kontrolü, Multibody Dynamics, Simulink

ABSTRACT

Mürvet Şeyma GÖREN

Double Inverted Pendulum Dynamic Modeling and Control

Master's Thesis

Konya, 2022

Inverted pendulums are non-linear, unstable systems and are the classical study area of control theory. An inverted pendulum is an unstable pendulum with its center of mass above its pivot point and falling without additional assistance. These pendulums, which are in the opposite position, are monitored by the control system of the angle of the elbow and horizontal force is applied with the control system to keep it in balance. In this thesis, the mathematical modeling theory of the onboard inverted pendulum system has been published in the literature. Virtual modeling was performed in Multibody Dynamics. Later, 3 different controllers were added to this modeled vehicle in Matlab-Simulink; these are LQR, PD and Fuzzy-LQR. Performance comparisons of these controllers were made with visual graphics. According to these comparisons, it has been determined that the Fuzzy-LQR controller is more usable than the other controllers used in this thesis.

Keywords

Double Inverted Pendulum, Fuzzy-LQR Control, LQR Control, PD Control, Simulation, Double Inverted Pendulum Control, Multibody Dynamics, Simulink

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
BİLDİRİM	ii
ETİK BEYAN.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. MATERYAL METOD	9
3.1. Düz Sarkaç Sistemleri ve Formülasyonları	9
3.1.1. Mekanik Sistemlerin Dinamik Modellenmesinde Lagrange Formülasyonu	9
3.1.2. Lagrange Denklemlerinin Kartezyen Koordinatlarda Türetilmesi	11
3.1.3. Tek Sarkaç Sisteminin Lagrange Denklemiyle Modellenmesi	13
3.1.4. Çift Sarkaç Sisteminin Lagrange Denklemiyle Modellenmesi	14
3.2. Araç Üzeri Ters Sarkaç Sistemleri	17
3.2.1. Araç Üzeri Tek Ters Sarkaç Sistemleri	17
3.2.2. Araç Üzeri Çift Ters Sarkaç Sistemleri	22
3.3. Kontrolcü Sistemlerinin Analizi ve Tasarımı.....	26
3.3.1. Kontrolcü Tasarımlarının Analizi.....	26
3.3.2. Oransal-İntegral-Türevsel (PID) Kontrolcü Tasarımı	30
3.3.3. LQR Kontrolcü Tasarımı.....	34
3.3.4. Bulanık Mantık-LQR Kontrolcü Tasarımı	38
4. BİR TERS SARKAÇ SİSTEMİNİN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ.....	40
4.1. Araç Üzeri Çift Ters Sarkaç Sisteminin Modellenmesi	40
4.2. Kontrol Uygulamaları.....	41
4.2.1. PD Kontrolcü Tasarımı.....	41
4.2.2. LQR Kontrolcü Tasarımı.....	42

4.2.3. Bulanık Mantık-LQR Kontrolcü Tasarımı	42
4.3. Kontrol Uygulamaları Sonrası Simulasyon Sonuçlarının Karşılaştırılması	49
5. SONUÇ	54
KAYNAKLAR	55
EKLER EK	60
ÖZGEÇMİŞ	63

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 1. Araç üzeri çift ters sarkaç model parametreleri	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
Tablo 2. P, I ve D Kontrolörlerin Karakteristikleri	34
Tablo 3. Tez Kapsamında Kullanılan Bulanık Kural Tabanı.....	47

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Araç Üzeri Ters Sarkaç	1
Şekil 2. Tek Sarkaç	13
Şekil 3. Çift Sarkaç	14
Şekil 4. Araç Üzeri Tek Ters Sarkaç.....	17
Şekil 5. Araba Üzeri Çift Ters Sarkaç.....	22
Şekil 6. Açık çevrim kontrol sisteminin blok şeması.....	27
Şekil 7. (a) Açık çevrim TGÇÇ sistem gösterimi, (b) Açık çevrim ÇGÇÇ sistem gösterimi.....	27
Şekil 8. Kapalı çevrim kontrol sisteminin blok şeması.....	27
Şekil 9. PID Kontrolör Kapalı çevrim Blok Diagramı.....	31
Şekil 10. PID Kontrolcünün Blok Şeması.....	32
(“Introduction: PID Controller Design”, 2017)	32
Şekil 11. Dönme Açısı Hesaplanması Alt Sistemi.....	40
Şekil 12. Tek Giriş Çok Çıkışlı Kontrol Sistemi Yaklaşımı	41
Şekil 13. Bulanık Mantık Uygulanan Sistemin Blok Diyagramı.....	43
Şekil 14. Hata değişkeni için MATLAB bulanık küme gösterimi.....	44
Şekil 15. Hata türevi değişkeni için MATLAB bulanık küme gösterimi.	45
Şekil 16. Bulanık kontrolör çıkışı için MATLAB bulanık küme gösterimi.	46
Şekil 17. Bulanık mantık Uygulanan Sistemin Simulink Üzerinde Gösterimi.....	47
Şekil 18. Füzyon Fonksiyonu Simulink Üzerinde Gösterimi	48
Şekil 19. Araç Yer Değiştirme-Zaman Grafiği	50
Şekil 20. Referans Araç Yer Değiştirme-Zaman Sinyal Grafiği.....	50
Şekil 21. Araç Hız-Zaman Grafiği	51
Şekil 22. İlk Sarkaç Açısı-Zaman Grafiği.....	51
Şekil 23. İlk Sarkaç Açısız Hız-Zaman Grafiği	52
Şekil 24. İkinci Sarkaç Açısı-Zaman Grafiği.....	52
Şekil 25. İkinci Sarkaç Açısız Hız-Zaman Grafiği	53

SİMGELER DİZİNİ

Simge	Açıklama
m_0	Aracın kütlesi
m_1	Birinci sarkacın kütlesi
m_2	İkinci Sarkacın kütlesi
L_1	Birinci sarkacın uzunluğu
L_2	İkinci sarkacın uzunluğu
l_1	Birinci sarkacın uzunluğunun yarısı
l_2	İkinci sarkacın uzunluğunun yarısı
θ_0	Aracın konumu
θ_1	Birinci sarkacın açısı
θ_2	İkinci sarkacın açısı
$\dot{\theta}_0$	Aracın hızı
$\dot{\theta}_1$	Birinci sarkacın açısal hızı
$\dot{\theta}_2$	İkinci sarkacın açısal hızı
$\ddot{\theta}_0$	Aracın ivmesi
$\ddot{\theta}_1$	Birinci sarkacın açısal ivmesi
$\ddot{\theta}_2$	İkinci sarkacın açısal ivmesi
g	Yerçekimi ivmesi

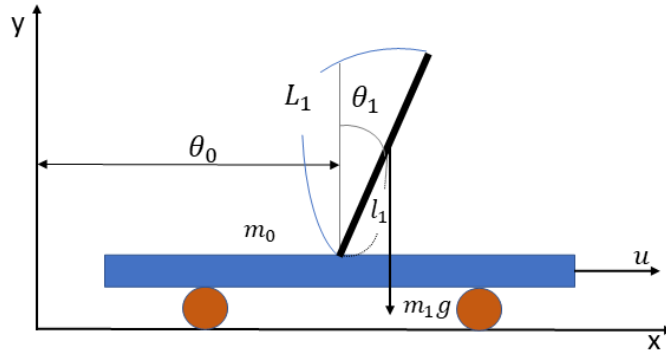
KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltma	Açıklama
ÇGÇÇ	Çok Giriş çok çıkış
TGÇÇ	Tek Giriş Çok Çıkış
GUI	Grafik Kullanıcı Arayüzü
LQR	Linear Quadratic Regulator
PID	Proportional-Integral-Derivative
FLC	Bulanık Mantık Kontrolcü
NB	Negatif Büyük
NM	Negatif Orta
NS	Negatif Küçük
P	Pozitif
PB	Pozitif Büyük
PM	Pozitif Orta
PS	Pozitif Küçük

1. GİRİŞ

Ters sarkaç sistemi, kontrol mühendisliği alanında kontrol teorisinin temellerini öğretmek amacıyla yaygın olarak kullanılan ölçütlerden biridir. Ters sarkaç, kütle merkezi dönme noktasının üzerinde olan kararsız ve ek yardım olmadan düşen bir sarkaçtır. Ters konumda olan bu sarkaçlar dirseğin açısını kontrol sistemi ile izlenir ve dengede tutmak için kontrol sistemiyle birlikte yatay kuvvet uygulanmaktadır. Normal bir sarkaç aşağı doğru sarkarken stabildir, ters çevrilmiş bir sarkaç doğası gereği kararsızdır ve dik kalabilmesi için aktif olarak dengelenmesi gerekir. Bu, pivot noktasına bir tork uygulayarak, bir geri besleme sisteminin parçası olarak pivot noktasını yatay olarak hareket ettirerek, pivot eksenine paralel bir eksende sarkacın üzerine monte edilmiş bir kütlein dönüş hızını değiştirerek ve böylece üretmek yapılabilir. Sarkaç üzerinde net bir tork veya pivot noktasını dikey olarak sallayarak, yani geri bildirim sisteminde pivot noktasını hareket ettirerek kişinin parmağının ucundaki kalkık bir aparat dengelenir.

Ters sarkaç dinamik ve kontrol teorisinde klasik bir problemdir ve kontrol stratejilerini test etmek için bir kıyaslama noktası olarak kullanılır. Genellikle Şekil 1’de gösterildiği gibi bir elektronik servo sistemin kontrolü altında yatay olarak hareket edebilen bir araba üzerine monte edilmiş pivot noktası ile gerçekleştirilir; buna araç ve ters sarkaç denir.



Şekil 1. Araç Üzeri Ters Sarkaç

Ters sarkacın daha popüler çalışma haline getiren bir diğer özelliği ise hareket halindeki robotlar, roketler, uçaklar ve depremölçerler gibi birçok teknolojik cihazların ya da makinelerin temelinde yer almasıdır (Peker, 2017).

Bu bağlamda, tez çalışmasında nonlineer ve kanonik bir problem olan ters sarkaç ele alınarak kontrol yöntemlerinin üzerinde denenmesi hedeflenmiştir. Ters sarkaç sistemi aynı zamanda iyi bilinen bir yetersiz tahrikli mekanik sistem (underactuated mechanical

system, UMS) örneğidir ve yüksek derecede doğrusal olmayan dinamiği sayesinde kontrol yöntemlerinin tasarımında kullanışlı bir test aracıdır (Peker, 2017).

Bu çalışmada öncelikle ters sarkaç problemiyle ilgili yapılan çalışmalar üzerinde durulacak. Çift ters sarkaç modellemesi ve bu modelleme ile sistem üzerinde yapılan kontrol yöntemleri hakkında bilgiler verilecek. Daha sonra araba üzerinde çift ters sarkaç modellemesi, denklemleri incelenecek ve tasarlanan kontrolcüler ile sonuçları karşılaştırılıp tartışılacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Ters sarkaç ile ilgili ilk bulgular yirminci yüzyılın başlarında görülmüştür (Gao, Cecati ve Ding, 2015). İlk sonuçlar 1908'de ters sarkacın tabanına hızlı, dikey, harmonik salınımlar uygulayarak stabilize edilebileceğini gösterilmiştir (Ding, 2009). Stephenson tarafından 1909'da ikili ve üçlü ters sarkaçlar için stabilite koşullarını belirlenmeye başlanmıştır (J. Wang, 2015). 1932'de Lowenstern, ters sarkaçlar için genel hareket denklemlerini geliştirdi (Khosrowjerdi ve Barzegary, 2014). 1960'larda, ters sarkaçların dinamikleri iyi anlaşıldı. Ters Sarkaç Tarihi (Lundberg ve Barton, 2009) adlı makalelerinde, yazarlar 1960 ile 1970 arasındaki literatürdeki erken düzenlemeleri bazılarını sunmakta ve Roberge'in M.I.T.'de tek ters sarkaç sistemine ilk çözümü gösterdiğini belirtmektedir. Leonard Gould tarafından yönetilen, uygun bir şekilde adlandırılmış lisans tezi The Mechanical Seal (Assidi, 2017). Ayrıca Donald, Higdon ve Cannon'un 1963'te Stanford Üniversitesi'nde birden çok bağımsız ters çevrilmiş sarkaçlı sistemleri tanımladıklarını ve Schaefer ve Cannon'ın 1966'da eklemli ve esnek ters çevrilmiş sarkaç sistemlerini betimlediler (Mouna, Ali, Slim ve Faycal, 2017). 1960'ların sonunda kontrol teorisi ve robotiğin ortaya çıkmasıyla birlikte, ters sarkaç, diğerlerinin yanı sıra öğretim ve araştırmalar için en popüler sistem haline geldi. Daha sonra çeşitli kontrol problemlerini çözmek için yüksek ilgi çeken çözümler önerilmiştir. İlk aşamada, dik konum (Zhang, Jiang ve Staroswiecki, 2010) etrafındaki stabilizasyon problemi ve salınım problemi (Zhao, Lam ve Gao, 2009) bağımsız olarak çözülmüştür. Son aşamada ise tam çözüm önerilmiştir (Ichalal, Marx, Ragot ve Maquin, 2009). Takip problemini (Dhahri, Sellami ve Hmida, 2016) ve ayırma prensibine sahip gözlemci tabanlı kontrolör problemini (Lee, Park ve Park, 2012) çözmek için bazı çözümler takip edilmektedir. Parametre tanımlama sorunu bazı makalelerde de ele alınmaktadır (Raoufi, Marquez ve Zinober, 2010). Gecikme kontrolü sorunu (Yang, Zhu ve Sun, 2013), çataklanma analizi (Veluvolu ve Soh, 2011) ve ters çevrilmiş sarkacın olası kaos dinamikleri (Alwi, Edwards ve Tan, 2009) ile ilgili çok az makale vardır (Boubaker ve Iriarte, 2017).

Ters sarkaç sistemleri araştırmacılar tarafından kontrol uygulamalarında oldukça yaygın kullanılan sistemlerin başında gelmektedir. Bu sistemler doğrusal olmayan bir yapıya sahip olmakla birlikte literatürde az tahrikli mekanik sistem (underactuated mechanical system) örneği olarak da yer almaktadır. Serbestlik derecesinden daha az sayıda eyleyiciye sahip olan ters sarkaç sistemlerinin kontrolü ile ilgili çalışmalar robotik kontrol

alanında yaygın bir şekilde çalışılmaktadır (Liu ve Yu, 2013). Yapılan çalışmalar genel olarak sınıflandırıldığı zaman iki bölüme ayrılmaktadır. Çalışmaların bir bölümünde sarkacın düşey konumundan tepe noktasına sallandırılarak kaldırılması problemi incelenirken diğer bölümünde ise sarkacın kararsız dikey konumda dengede tutulması probleminin incelendiği görülmektedir. Tezin bu bölümünde ters sarkaç sistemlerinin kontrolü problemi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar irdelenecektir.

Jadlovská ve Sarnovský yaptıkları çalışmada, Simulink kütüphanesi olarak geliştirdikleri Inverted Pendulum Modeling and Control (IPMaC) adını verdikleri bir sistem vasıtasıyla bir çift ters sarkaç sistemin detaylıca analizini gerçekleştirmişlerdir. IPMaC'de bulunan özel fonksiyon blokları sayesinde klasik ve döner ters sarkaç sistemlerinin modellenmesi, simülasyonu ve kontrolü için geniş kapsamlı bir çalışma ortaya koymuşlardır. Oluşturulan bu kütüphane aynı zamanda modelleme ve doğrusallaştırma prosedürlerini gerçekleştirmek amacıyla kullanıcı dostu bir grafik arayüz (GUI) sağlayan yazılım araçlarını da içermektedir. IPMaC'daki uygun fonksiyon blokları, GUI araçları ve gösterim şemaları sayesinde, klasik çift ters sarkaç sistemi, kararsız konumda iken analiz edilerek, sistemin modellenmesi ve stabilizasyonu başarılı bir şekilde gerçekleştirilmiştir (S. Jadlovská ve Sarnovský, 2012).

Strakoš ve Tůma çalışmalarında yatay ekseninde hareket kabiliyeti olan bir aracın üstüne yerleştirilmiş olan ters sarkacın pozisyon kontrolü problemini ele almışlardır. Çalışmada arabaya kuvvet uygulayarak dikey bir konum boyunca ters sarkaçın dengelenmesini amaçlamışlardır. İkinci tip Lagrange denklemleri kullanılarak sistemin matematiksel modeli hem durum uzayı formunda hem de transer fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Daha sonra sisteme darbe ve adım girişleri uygulanarak ters sarkacın dinamik davranışı gözlemlenmiştir. Ayrıca sistemin kararlılık analizi, kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliği durumları da incelenmiştir. Son olarak MATLAB Simulink programında kontrolör tasarlanmış ve simüle edilmiştir. Son olarak ters sarkacın pozisyon kontrolünün tam durum geri besleme yöntemi kullanılarak başarı ile gerçekleştirildiği görülmüştür (Strakoš ve Tůma, 2017).

Kamil Andrzejewski et al., yaptıkları çalışmada araç üzerinde yer alan klasik bir çift ters sarkaç sisteminin matematiksel modellenmesi problemi incelenmiştir. Matematiksel modelin elde edilmesi sürecinde Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak harici

kuvvetler ve sürtünme kuvvetinin etkileri de dahil edilerek gerçekçi bir model elde edilmeye çalışılmıştır. Çalışma sonunda elde edilen modelin çift ters sarkaç sistemlerin tanımlanma, simülasyon ve kontrol sistemi tasarımı işlemlerinde başarılı bir şekilde kullanılabilirdiği saptanmıştır (Andrzejewski, Czyżniewski, Zielonka, Łangowski ve Zubowicz, 2019).

Asef. Zare et al., çalışmalarında, bir araç üzerine yerleştirilmiş çift ters sarkaç sisteminin kontrolü problemi ile ilgili yeni bir kontrol yaklaşımı sunmuşlardır. İlk adım olarak, sistemin modeli Lagrange denklemi kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonra ise optimal kontrol tasarımı için gerekli olan teorem ve matematiksel arka plan sunulmuştur. Son olarak ise çift ters sarkaç sisteminin konum kontrolü için gerekli olan optimal kontrolcü tasarımı gerçekleştirildikten sonra elde edilen sonuçlar (konum sonuçları) grafiklerle desteklenerek kontrol algoritmasının başarılı sonuç verdiği saptanmıştır (Zare, Balochian, Arvan ve Balochian, 2009).

Bogdanov yaptığı çalışmada bir araba üzerinde yer alan çift ters sarkaç sistemin optimal kontrolü problemi için bir takım algoritmaları incelemiş ve kıyaslamalarını yapmıştır. Sistemin matematiksel modellemesi sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi arasındaki farkın belirlenerek türetildiği Euler-Lagrange denklemleri ile elde edilmiştir. Sistemin optimal kontrolü ikinci dereceden bir maliyet fonksiyonunun minimize edilmesi olarak ele alınmıştır. Bu kapsamda, lineer kuadratik regülatör (LQR), duruma bağlı Riccati denklemi (SDRE), optimal sinir ağı (NN) kontrolü ve bu üç yaklaşımın birbiri ile kombinasyonları test edilip sonuçlar kıyaslanmıştır. Simülasyon sonuçları SDRE tekniğinin LQR tasarımına göre avantajını göstermiştir. Ayrıca LQR yöntemindeki model yetersizliklerinin NN tarafından kompanze edildiği sonucu elde edildiği görülmüştür. NN kontrol yaklaşımının LQR veya SDRE ile kombinasyonu sonucu elde edilen kontrolcü yapısının toplam performans olarak en başarılı kombinasyon olduğu saptanmıştır (Bogdanov, 2004).

Hou et al., yaptıkları çalışmada D'Alembert prensibi ile mekanik modeli kurulan bir çift ters sarkacın lineer yaya bağlı çift ters çevrilmiş sarkacın salınım kontrolünü incelemeyi amaçlamışlardır. Tasarım değişkenleri olarak ayrık kontrol kuvveti ve amaç fonksiyonu olarak uçbirim kısıtlama koşulu alınarak, salınımlı kontrol yasaları bir optimizasyon yöntemi ile hesaplanmıştır. Simülasyonun sonuçları incelediği zaman, lineer yaya bağlı

çift ters sarkacın salınım kontrolünün optimizasyon yöntemi ile başarılı bir şekilde gerçekleştirildiği ve bu yöntemin etkili ve uygulanabilir olduğu gösterilmiştir (Hou, Zhang, Zheng ve Xu, 2010).

Jadlovská ve Sarnovský yaptıkları çalışmada, rastgele sayıda sarkaç bağlantısına sahip klasik veya döner ters sarkaç sistemleri için matematiksel model türetme problemine bir yaklaşım getirmişlerdir. Kapsamlı fiziksel analiz yoluyla, genelleştirilmiş bir klasik veya döner ters sarkaç sistemlerindeki taban ve her sarkaç için Euler-Lagrange denklemlerini belirleyen genel algoritmik prosedürler tasarlanmıştır. Daha sonra bu prosedürler, kullanıcı tarafından seçilen yukarıda belirtilen sarkaç sistemleri için hareket denklemlerini oluşturan MATLAB fonksiyonları olarak uygulanmıştır. Uygulama tarafından üretilen hareket denklemlerinin geçerliliği ve doğruluğu, klasik çift ve döner tek ters sarkacın simülasyon modellerinin açık döngü yanıtları değerlendirilerek grafiklerle gösterilmiştir (Slávka Jadlovská ve Sarnovský, 2013).

Okubanjo ve Oyetola, yaptıkları çalışmada bir ters sarkacın sistem dinamiklerini açıkça modellemek suretiyle yatay konumda sarkacın bulunduğu arabaya uygulanan giriş kuvvetini kontrol ederek sarkacı dikey konumda dik bir şekilde stabilize edecek farklı kontrol algoritmalarını uygulamayı amaçlamışlardır. Sistemin matematiksel modeli Lagrange denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Kontrol algoritmaları, MATLAB-SIMULINK ortamında türetilmiş matematiksel model üzerinde sisteme uygulanmıştır. Sistemin kontrolü için oransal-integral-türev denetleyici (PID), kutup yerleştirme geri besleme denetleyicisi (PPFC), lineer kuadratik regülatör (LQR) ve tahmin edici lineer kuadratik regülatör (LQR+E) olmak üzere dört farklı kontrol algoritması tasarlanmış ve uygulanmıştır. Çalışma sonucunda önerilen kontrol algoritmalarının sistem yanıtları ve performansları kıyaslamalı olarak sunulmuştur (Okubanjo ve Oyetola, 2019).

Isa et al., yaptıkları çalışmada ters sarkaç sistemini kontrol etmek için model referans yaklaşımını kullanan bir hibrit bulanık uyarlamalı kontrol sistemi tasarlamışlardır. İlk olarak, sistemin matematiksel modelini geliştirmek için Lagrange modeli kullanılmıştır. Daha sonra, aynı kontrol döngüsünde konum kontrolü ve daha sonra konum ve sarkaç açısının eşzamanlı kontrolünü sağlamak için uyarlanabilir bir bulanık kontrol sistemi geliştirilmiştir. Sunulan kontrol algoritması, referans izleme, bozucu etkinin giderilmesi ve parametre değişimine karşı sistemin dayanıklılığını sağlamak amacıyla yönelik

tasarlanmıştır. Önerilen kontrol yapısının performansı PID ve LQR kontrolcü yapıları ile kıyaslanmıştır. Simülasyon sonuçları, önerilen kontrol şemasının yüksek performanslı dinamik özellikler gösterdiğini ve parametrik değişimler ve dış bozucu etkilere karşı sağlam sonuçları elde edildiğini göstermiştir (Isa, Hamza ve Muhammad, 2019).

Coşkun, yaptığı çalışmada, bir ters sarkaç sistemi için doğrusal olmayan bir yapıya sahip kontrolcü tasarımı yapmıştır. Öncelikle, ters sarkaç yapısının matematiksel modeli Lagrange denklemleri vasıtasıyla türetilmiştir. Daha sonra Lyapunov metodu kullanılarak sistemin kararlılığı analiz edilmiştir. Sisteme kontrolcü olarak geri beslemeli doğrusallaştırılmış kontrol yapısı ve doğrusal olmayan kayan kipli kontrol yapısı uygulanmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçları grafiklerle gösterilmiştir. Ortaya çıkan sonuçlar; doğrusal olmayan kontrolcü yapısının daha başarılı sonuçlar ortaya koyduğu gözlemlenmiştir (Coşkun, 2020).

Çeven ve Albayrak yaptıkları çalışmalarında bir çift ters sarkaç sisteminin kontrolüne ilişkin kontrolcü tasarımı gerçekleştirmişlerdir. İlk olarak çift ters sarkaç sisteminin matematiksel olarak modellenmesi gerçekleştirilmiştir. Daha sonra bu model MATLAB/Simulink ortamında bloklar yardımıyla oluşturulmuştur. Kontrolcü olarak sisteme PID ve LQR kontrolcü yapıları uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlarla bu iki kontrolcü yapısının performansları kıyaslanmıştır. Çıkan sonuçlara göre, iki yöntem de başlangıç durumunda dengede bulunan çift ters sarkacı hedef noktaya dengeli bir şekilde ulaştırmıştır. LQR kontrolcü yapısıyla yapılan çalışmada salınımın az olduğu görülürken, PID kontrolcü yapısıyla gerçekleştirilen çalışmada sistemin alt ve üst açılarında salınımın ve referans değerlerine oturma zamanlarının yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, çift ters sarkaç sisteminin konum kontrolü problemi için LQR kontrolcü yapısının daha hızlı cevap tepkisi verdiği gözlenmiştir (ÇEVEN ve ALBAYRAK, 2020).

Nasir et al., yaptıkları çalışmada, bir ters sarkaç sistemi için iki geleneksel kontrolör yapısı olan PID ve LQR kontrolcü yapılarının tasarımını gerçekleştirmişlerdir. Çalışmadaki ilk amaç bu iki kontrolcü yapısı arasındaki zamana bağlı performans parametrelerini (yükselme zamanı, yerleşme zamanı vb.) karşılaştırmaktır. Diğer amaç ise, sarkacın açısına ve arabanın konumuna göre hangi kontrol stratejisinin daha iyi performans sağladığını belirlemektir. Doğrusallaştırılmış ters sarkaç modelinin kontrolünü sağlamak için yukarıda bahsi geçen kontrolcü yapıları MATLAB/Simulink

ortamında oluşturulduktan sonra sistemin simülasyonu gerçekleştirilmiştir. Yapılan simülasyon çalışması, her iki kontrolörün de çok çıkışlı ters sarkaç sistemini başarılı bir şekilde kontrol edebildiğini göstermiştir. Sonuçlar detaylı incelendiğinde, LQR kontrolcü yapısının PID kontrolcü yapısına kıyasla daha iyi yanıt verdiği ve zaman alanında daha başarılı performans gösterdiği gözlemlenmiştir (A. N. K. Nasir, 2008).

Tinkir et al., gerçekleştirdikleri çalışmada bir çift ters sisteminin konum kontrolü için Aralık Değerli Tip2 Bulanık Mantık (IT2FL) ve PID kontrolör tasarlamışlardır. Çalışmada, sistemdeki rijit çubukların düzlemsel hareket yaptığı varsayılmaktadır. Tabana monte edilmiş bir motor vasıtasıyla sağlanan tork, sistemin konum kontrolü için kullanılmaktadır. PID ve IT2FL kontrolörleri, çift ters sarkaç sisteminin konum kontrolü için aynı performans kriterleri kullanılarak geliştirilmiştir. Kontrolörlerin performanslarını test etmek için bazı performans kriterleri belirlenmiş ve sistem için tasarlanan kontrolörlerin performansları bu kriterlere göre kıyaslanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre IT2FL kontrol yapısının çift ters sarkacın kontrolünde PID kontrolcü yapısına göre daha başarılı sonuçlar ortaya koyduğu görülmüştür (Tinkir, Onen, Kalyoncu ve Botsali, 2010).

Mohan et al., yaptıkları çalışmada, bir çift ters sarkaç sisteminin açısız konumunu dış bozucu ve gürültü etkisi altında istenilen konumda stabilizasyonunu sağlamayı amaçlamışlardır. Bu amaç için genetik algoritma destekli bulanık mantık (GFC) ve adaptif nöro-bulanık kontrolcü (NFC) yapıları önerilmiş olup, burada bulanık parametreler sırasıyla genetik algoritma ve yapay sinir ağı ile optimize edilmiştir. Adaptif nöro-bulanık kontrol tekniği, sinir ağının güçlü öğrenme kabiliyetine sahipken, genetik algoritma problem için optimum çözümleri aramak için kullanılmaktadır. Ayrıca modifiye nöro-bulanık kontrolör (MNFC) nöro-bulanık çıkarım sisteminin eğitim veri setini değiştirmek için uygun bir fonksiyon olarak önerilmiştir. Doğrusal Kuadratik Düzenleyici (LQR) ve Bulanık Mantık Denetleyicileri (FLC) de karşılaştırmalı analiz için tasarlanmıştır. Tasarlanan kontrolörlerin performansı İntegral Mutlak Hata (IAE), yerleşme süresi, sabit durum hatası, dış bozucu etkisini giderme, gürültü bastırma gibi farklı açılardan gözlenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre MNFC'nin tüm durumlar için tasarlanmış kontrolörlere kıyasla ters sarkaç sisteminin hızlı ve sağlam kontrolünü sağladığı görülmüştür (Mohan, Rani ve Singh, 2017).

3. MATERYAL METOD

3.1. Düz Sarkaç Sistemleri ve Formülasyonları

3.1.1. Mekanik Sistemlerin Dinamik Modellenmesinde Lagrange Formülasyonu

Lagrange formalizmi, büyük bir mekanik sistem sınıfını modellemek için titreşim yöntemine dayanan güçlü matematiksel araçlardan biridir. Az çalıştırılan mekanik sistemler bu sınıfın dallarıdır. Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak modellenenlerdir. Q , n boyutlu bir konfigürasyon katı olsun ve $q \in Q$, genelleştirilmiş koordinatların bir vektörüdür. n serbestlik dereceli (DOF) herhangi bir mekanik sistem için Euler-Lagrange denklemleri (Jeong ve Takahashi, 2008) ile verilmiştir.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = B(q)u \quad (1)$$

Burada $u \in \mathbb{R}^m$ ve $B(q)$ dış kuvvetler matrisidir. $L(q, \dot{q})$, mekanik sistemle ilişkilendirilen ve kinetik ve potansiyel enerjiler arasındaki farkla ifade edilen Lagrange'dır:

$$L(q, \dot{q}) = K - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q) \quad (2)$$

Burada K kinetik enerji, $V(q)$ potansiyel enerjiyi ve $M(q) = M^T(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif belirli bir atalet matrisidir. $m_{ik} \in \mathbb{R}^+$; $i = 1, \dots, n$ ve $k = 1, \dots, n$ ile M atalet matrisinin girişlerini gösterebilir. (1) ve (2)'ye dayanarak, hareket denklemleri aşağıdaki gibi çıkarılabilir.

$$\sum_k m_{ik}(q) \ddot{q}_k + \sum_{i,k} \Gamma_{ik}^l(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + g_i(q) = e_i^T B(q)u, \quad l = 1, \dots, n \quad (3)$$

Burada e_l , l 'inci \mathbb{R}^n standart temelidir, $g_i = \partial_{q_i} V(q)$ ve $\Gamma_{ik}^l(q)$, şu şekilde tanımlanan Christoffel sembolüdür.

$$\Gamma_{ik}^l(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ik}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{li}(q)}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ik}(q)}{\partial q_l} \right) \quad (4)$$

n bir matris formu, (3) şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u \quad (5)$$

$C(q, \dot{q})$ terimi iki ayrı terim içerir, özellikle, ilk $q_i \dot{q}_k$ terimi merkezkaç kuvvetleri ($i = k$) içerir ve ikincisi ($i \neq k$) için Coriolis kuvvetleri ve $G(q)$ yerçekimi vektörünü temsil eder. (5) ile tanımlanan mekanik sistemin $M(q) + 2C(q, \dot{q})$ matrisinin çarpık simetrik özelliğini sağladığını belirtmek ilginçtir.

Hareket denklemi (5) tarafından yönetilen iki mekanik sistem kategorisini ayırt etmek önemlidir. (5) ile tanımlanan mekanik bir sistemin, $m = n$ olması durumunda tamamen harekete geçirildiği söylenir; bu, $B(q) \in R^{n \times m}$ matrisinin ters çevrilebilir olduğunu söylemeye eşdeğerdir. Başka bir deyişle, aktüatörlerin sayısı konfigürasyon manifoldunun boyutuna eşitse, mekanik sistemin tamamen çalıştırıldığı kabaca çıkarılabilir. Öte yandan, $m < n$ ise, mekanik sistemin, kontrol edilecek serbestlik derecesi sayısından daha az bağımsız girdiye sahip olmasıyla eşdeğer olan, yetersiz çalıştırıldığı söylenir. Bu, $B(q)$ matrisinin tersine çevrilemez hale geldiği ve sonuç olarak tam olarak çalıştırılan sistemlerin aksine eksik çalıştırılan mekanik sistemin kesin geri besleme doğrusallaştırmadığı anlamına gelir. Girdi sayısı, serbestlik derecesi sayısından daha az olduğu için, mekanik olarak az çalıştırılan sistemin kontrol edilebilirliği her zaman karşılanmaz. Ancak bu bölümde, ele alınan mekanik sistemlerin kontrol edilebilir olduğunu varsayacağız. Ayrıca, hareket denkleminin (5) yeniden düzenlenebileceğini ve böylece $B(q)$ matrisinin şu şekilde yazılabileceğini varsayalım:

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

(6)'nın ilk $n - m$ denklemleri harekete geçirilmemiş dinamikleri temsil ederken, son m denklemleri harekete geçirilen dinamiklerdir. Genelleştirilmiş koordinatlar q ayrıca aşağıdaki gibi bölümlere ayrılabilir:

$$q = \begin{bmatrix} q_u \\ q_a \end{bmatrix} \quad (7)$$

Burada $q \in R(n - m)$ çalıştırılmamış yapılandırma değişkenlerinin vektörüdür ve $q_a \in R_m$, harekete geçirilmiş yapılandırma değişkenlerinin vektörüdür. Ardından, hareket denklemini (8) aşağıdaki gibi yeniden yazmak kolaydır:

$$\begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(q) & c_{12}(q) \\ c_{21}(q) & c_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Bölünmüş hareket denklemi (8) ayrıca bileşen formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$m_{11}(q)\ddot{q}_u + m_{12}(q)\ddot{q}_a + h_1(q, \dot{q}) = 0 \quad (9)$$

$$m_{21}(q)\ddot{q}_u + m_{22}(q)\ddot{q}_a + h_2(q, \dot{q}) = u_2 \quad (10)$$

$$h_1(q, \dot{q}) = c_{11}(q)\dot{q}_u + c_{12}(q)\dot{q}_a + g_1(q) \quad (11)$$

$$h_2(q, \dot{q}) = c_{21}(q)\dot{q}_u + c_{22}(q)\dot{q}_a + g_2(q) \quad (12)$$

(9)'da kontrol girişi yoktur. Bu nedenle, sistemi (8) ve (9)'u doğrusallaştırmak için geri besleme mümkün değildir. Bununla birlikte, bir kontrol değişikliği kullanarak sistemi kısmen geri besleme ile doğrusallaştırmak mümkündür (Boubaker ve Iriarte, 2017).

3.1.2. Lagrange Denklemlerinin Kartezyen Koordinatlarda Türetilmesi

x_i konumunun kartezyen koordinatlarını kullanarak korunumlu bir kuvvet alanındaki çok sayıda (N) parçacık için korunum denklemlerini dikkate alarak başlıyoruz. Bu sistem için toplam kinetik enerjii şu şekilde yazıyoruz:

$$T = \sum_{n=1}^M \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (13)$$

Burada M, sistemin serbestlik derecesi sayısıdır, m_i , parçacık kütlesi ve x_i , parçacık hızıdır.

Yalnızca bir yönde hareket eden parçacıklar için, her parçacığın konumunu tanımlamak için yalnızca bir x_i gereklidir, böylece serbestlik derecesi sayısı $M = N$ olur. Üç boyutta hareket eden parçacıklar için, her parçacık 3 x_i koordinatı gerektirir, böylece $M = 3 * N$

Belirli bir yöndeki belirli bir parçacığın momentumu, bu ifadenin uygun x_i koordinatına göre türevi alınarak elde edilebilir. Bu, bu belirli parçacık için bu koordinat yönündeki p_i momentumunu verir.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = p_i \quad (14)$$

Momentumun zamana göre türevi (15)'teki gibidir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = m_i \ddot{x}_i \quad (15)$$

Tutucu bir kuvvet alanı için, bir parçacık üzerindeki kuvvet, parçacık pozisyonundaki istenen yöndeki potansiyelin türevi ile verilir.

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (16)$$

Newton yasasından elde ettiğimiz (17)'deki denklemden yola çıkarak;

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} \quad (17)$$

Kinetik enerji üzerindeki yönlendirmelerden benzer terimleri ve tutucu bir kuvvet alanının potansiyelini eşitleyerek yazıyoruz.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (18)$$

Burada (18)'i kullanıyoruz ve (19) ve (20) elde edilir;

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (20)$$

Bu sonuçları kullanarak (18)'i şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial x_i} = 0 \quad (21)$$

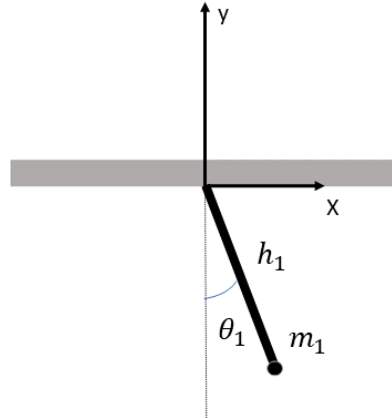
Şimdi $L = T - V$ tanımlıyoruz: L 'ye Lagrange denir. (21) son halini alır: Kartezyen koordinatlarda Lagrange denklemleri.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (22)$$

Burada i , sistemin tüm serbestlik derecelerini devralır. (Widnall, 2009)

3.1.3. Tek Sarkaç Sisteminin Lagrange Denklemiyle Modellenmesi

Basit bir sarkacın hareket denklemlerini türetmek için bir serbestlik dereceli Şekil 2'deki sistem kullanılır.



Şekil 2. Tek Sarkaç

(Kaynak: Widnall, 2009)

Kutupsal koordinatlarda basit bir sarkacın hareket denklemlerini türetmek için önce Lagrange denklemi uygulanır. Bu bir serbestlik dereceli sistemdir. Bununla birlikte, çift sarkacın sonraki analizi için, m_1 kütle noktasının konumunu x_1 ve y_1 kartezyen koordinatlarıyla tanımlayarak başlamak ve ardından Lagrange'ı Şekil 2'ye atıfta bulunarak kutup açısı θ_1 ile ifade etmek uygundur.

$$x_1 = h_1 \sin \theta_1 \quad (23)$$

$$y_1 = -h_1 \cos \theta_1 \quad (24)$$

Yani kinetik enerji;

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 h_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (25)$$

Potansiyel enerji;

$$V = m_1 g y_1 = -m_1 g h_1 \cos \theta \quad (26)$$

Lagrange denklemi şu şekildedir:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 h_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g h_1 \cos \theta_1 \quad (27)$$

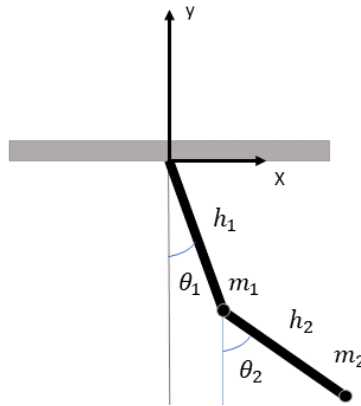
Burada (10)'daki denklemde $q_1 = \theta_1$ ile uygulayarak hareketi yöneten diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$m_1 h_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g h_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (28)$$

Benzer basit bir sistem sonucu elde etmek için tipik olarak bu formalizm uygulanır. Bu çerçevede b'de gösterilen çift sarkaç gibi daha karmaşık sistemler için hareket denklemlerinin türetilmesini sağlar.

3.1.4. Çift Sarkaç Sisteminin Lagrange Denklemiyle Modellenmesi

Basit çift sarkacın hareket denklemlerini türetmek için bir serbestlik dereceli Şekil 3'teki sistem kullanılır.



Şekil 3. Çift Sarkaç

(Kaynak: Widnall, 2009)

Bir pivota asılı, kütle noktaları m_1 ve m_2 olan, h_1 ve h_2 uzunluğunda iki çubuktan oluşan Şekil 4'te gösterilen çift sarkaç düşünün. Bu sistemler iki serbestlik derecesine sahiptir, bunlar θ_1 ve θ_2 'dir.

Lagrange denklemlerini uygulamak için, sistem bağımsız açılar θ_1 ve θ_2 boyunca açısal yer değiştirmede hareket ederken kinetik enerji ve potansiyel için ifadeler belirleriz. Elimizdeki Şekil 2 ve Şekil 3'ten çıkan geometriden;

$$x_1 = h_1 \sin \theta_1 \quad (29)$$

$$y_1 = -h_1 \cos \theta_1 \quad (30)$$

$$x_2 = h_1 \sin \theta_1 + h_2 \sin \theta_2 \quad (31)$$

$$y_2 = -h_1 \cos \theta_1 - h_2 \cos \theta_2 \quad (32)$$

Kinetik Enerji:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (33)$$

θ_1 ve θ_2 değişkenlerinde ifade edildiğinde, sistemin kinetik enerjisi:

$$T = \frac{1}{2} m_1 h_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (h_1^2 \dot{\theta}_1^2 + h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (34)$$

Sistemin potansiyel enerjisi:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) g h_1 \cos \theta_1 - m_2 g h_2 \cos \theta_2 \quad (35)$$

Lagrange o zaman;

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) h_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 h_1 h_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g h_1 \cos \theta_1 + m_2 g h_2 \cos \theta_2 \quad (36)$$

Genelleştirilmiş koordinatlar artık θ_1 ve θ_2 olduğundan, Lagrange denklemi şu hale gelir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \right) = 0 \quad (37)$$

Hem $i = 1$ hem de $i = 2$ için lagrange denklemleri şöyledir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0 \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0 \quad (39)$$

Denklem detayları üzerinde çalışıldığında şu denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2)h_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2h_1h_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2h_1h_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -h_1g(m_1 + m_2) \sin(\theta_1) - m_2h_1h_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2h_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2h_1h_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2h_1h_2\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -h_1gm_2 \sin(\theta_2) - m_2h_1h_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (43)$$

Denklem (40-43)'ten, çift sarkaç için geçerli denklemlerin son şeklini elde ederiz:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)h_1\ddot{\theta}_1 + m_2h_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_2h_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$m_2h_2\ddot{\theta}_2 + m_2h_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2h_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2g \sin \theta_2 = 0 \quad (45)$$

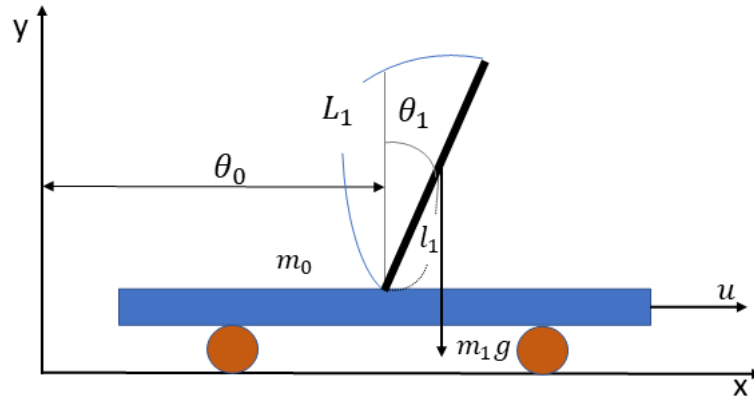
Çift sarkaç, küçük θ_1 ve θ_2 için geleneksel doğrusal çok serbestlik dereceli sistem davranışını gösteren, ancak büyük θ için kaotik davranış sergileyen, büyük ilgi gören bir

sistemdir. Kaotik bir sistem, başlangıç koşullarına büyük hassasiyet gösteren deterministik bir sistemdir: “kelebek” etkisi. Başlangıç koşullarının belirli bir seçimi için, m_2 'nin zamanla konumu şekilde gösterilmiştir.

3.2. Araç Üzeri Ters Sarkaç Sistemleri

Ters sarkaç kıyaslaması, özellikle Şekil 4'te gösterilen araba versiyonu, doğrusal olmayan kontrol problemini çözmek için birçok referansta ele alınmıştır. Ters sarkaçlı araba, üzerine bir sarkacın monte edildiği ve sürüş yönünde serbestçe dönebilen bir serbestlik derecesine sahip hareketli bir arabadan oluşur. Taşıyıcı aracılığıyla F kuvveti uygulayan bir motor tarafından tahrik edilir.

3.2.1. Araç Üzeri Tek Ters Sarkaç Sistemleri



Şekil 4. Araç Üzeri Tek Ters Sarkaç

a. Sistemin Modellenmesi ve Lagrange Denklemleri

Sarkacın desteklendiği araba motora göre ileri geri hareket edebilmektedir. Arabanın hareketinin düzgün olacağını ve araba ile yol arasındaki yüzey sürtünmesinin ihmal edilebilecek kadar az olduğunu varsayıyoruz. Ayrıca arabanın denge konumu, verilen referans konumudur ve sarkacın karşılık gelen denge açısı, dik dikey konumundadır.

Gerçek zamanlı sistemin kontrol tasarımı için temel olarak bir ters sarkaç modeli kullanılır. Teorik modelin dinamik denklemleri ve değerleri, gerçek sürece mümkün olduğunca yakın olacak şekilde hesaplanır.

Ters sarkaç modelini elde etmek için sistemin dinamiği Lagrange Metodu kullanılarak analiz edilmiştir. Sistemimiz iki serbestlik dereceli bir sistemdir (yani θ_0 ve θ_1).

Potansiyel Enerji:

$$V = m_1 g (l_1 \cos \theta_1) \quad (46)$$

Kinetik Enerji:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[(\dot{\theta}_0 - l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] + l_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (47)$$

Lagrange Denklemleri:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_0} \right) = u \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0 \quad (49)$$

$$(m_0 + m_1) \ddot{\theta}_0 - (m_1 l_1 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 = u \quad (50)$$

$$-(m_1 l_1 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + I) \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (51)$$

b. Lineerleştirme

Sistem denklemlerinin belirli denge noktaları etrafında lineerleştirilmesi yapılmıştır. Düşey kararsız dengede sistemi alarak doğrusallaştırılır (Jibril, 2020).

$$\theta_1 = 0 \quad (52)$$

$$\cos \theta_1 = 1 \quad (53)$$

$$\sin \theta_1 = \theta_1 \quad (54)$$

$$\dot{\theta}_1^2 = 0 \quad (55)$$

Böylelikle hareket denklemi (56) ve (57)'deki gibi bulunur:

$$(m_0 + m_1) \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1) \ddot{\theta}_1 = u \quad (56)$$

$$(m_1 l_1) \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + I) \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \theta_1 = 0 \quad (57)$$

c. Durum-Uzay Modeli

Ters sarkaç sisteminin dinamiğini tanımlayan bir diğer gösterim şekli de sistemin durum uzayı modelidir. Durum uzayı modeli; sistemin dinamik davranışlarını tanımlayan ve durum denklemleri olarak adlandırılan birinci derece denklemlerden oluşan bir denklem takımındır. Durum denklemleri matris ve vektör biçimleri kullanılarak ifade edilir. Durum uzayı modeli ile herhangi bir anda bir sistemin dinamik davranışı o sistemin durum değişkenleri cinsinden tanımlanabilmektedir

Tersine çevrilmiş sarkaç dinamiği sisteminin bir durum uzayı temsili, önceden doğrusallaştırılmış iki denklemden türetilir. Sarkaç Arabası kurulumunun bu parametrelerini kullanma.

Denklem (50) ve (51) sistemin hareketini tanımlar. Basitlik açısından, bu denklemler yukarıda tanımlanan θ sütun vektörü kullanılarak matris biçiminde yazılabilir. Böylece (50)-(51) eşdeğer olarak şu şekilde yazılabilir:

$$D(\theta)\ddot{\theta} + C(\dot{\theta}, \theta)\dot{\theta} + G(\theta) = Hu \quad (60)$$

$D(\theta), C(\dot{\theta}, \theta), G(\theta), H(u)$ Matrisleri zamana göre değişir.

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 & m_1 l_1 \cos \theta_1 \\ m_1 l_1 \cos \theta_1 & m_1 l_1^2 + I \end{bmatrix}, \quad C(\dot{\theta}, \theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l_1 \sin(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad H(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eylemsizlik momenti $I = m_1 l_1^2/3$ 'ye eşittir, (Bogdanov, 2004). Farklı durum ve durumların ürünleri trigonometrik fonksiyonların argümanları olarak görüldüğünden, sistemin kesinlikle doğrusal olmadığını gözlemleyin. Bu, sistemi kontrol etmeyi zorlaştırır.

Şimdi $D(\theta)$ matrisinin her θ için tersinir olduğunu gözlemleyin, çünkü determinant her θ için her zaman pozitiftir. Gerçekten de determinant sıfırdan büyüktür.

$$\det(D(\theta)) = m_1^2 l_1^2 [1 - \cos^2(\theta_1)] + (m_0 + m_1)I + m_0 m_1 l_1^2 > 0 \quad (62)$$

Hareket denklemlerini bulduktan sonraki amaç, birinci mertebeden diferansiyel denklemlerden oluşan bir eşdeğer sistem tanımlamaktır. Bu tür sistemlere durum uzayı modelleri denir. Sütun vektörünü tanımlayın

$$x = [\theta^T \quad \dot{\theta}^T] = [\theta_0 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_0 \quad \dot{\theta}_1] \quad (63)$$

Model tanımı ($L = T - P$) kullanılarak ve soldan $D(\theta)$ 'nin tersi ile çarpılarak (60)'daki denklem şu şekilde yazılır.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & -D^{-1}C \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -D^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D^{-1}H \end{bmatrix} u \quad (64)$$

(13)'te matrisler, bağımlı oldukları değişkenlerden söz edilmeden yalnızca adlarıyla gösterilir. Bu, kısalık uğruna yapıldı, ancak her bir matris formunun bağımlılığı, değişkenleri hala eskisi gibi tutar.

$\dot{x} = f(x)$ ile tanımlanan dinamik bir sistemin denge noktaları, türevinin sıfıra eşit olduğu, yani $f(x_0) = 0$ olan x_0 noktaları olarak tanımlanır, sistem değişmez. Denge noktaları, sistemin x_0 'dan başladığında veya x_0 'a yakın olduğunda nasıl davrandığına bağlı olarak kararlı veya kararsız olarak sınıflandırılır. Ters sarkaç sistemi, biri kararlı ve diğeri kararsız olmak üzere iki dengeye sahiptir ve aralarındaki farkın anlaşılması kolaydır.

İlk denge, sarkacın $\theta_1 = 180^\circ$ açıyla aşağı indirildiği tam durma noktasıdır. Bu, asimptotik olarak kararlı bir dengedir, çünkü herhangi bir başlangıç koşulundan başlayarak, çubuk her zaman dinlenme halindeki alçaltılmış durumuna geri dönecektir. Örneğin sarkaç çubuğuna ellerimizle vuracak olursak, sistem küçük bir salınımdan sonra tekrar duracaktır. Sonuç olarak, sistemi bu dengeye getirmek için herhangi bir dış kaynaktan herhangi bir girdiye gerek yoktur. Öte yandan, ikinci denge, $\theta_1 = 0^\circ$ açıyla dik dikey konuma karşılık gelir. Bu noktada sarkaç dengededir, ancak en ufak bir bozulma onun bu durumdan sapmasına, salınmasına ve alçaltılmış pozisyonda durmasına neden olacaktır. Bu nedenle, ikinci denge noktası için sarkacı dik konumda tutmak için sabit bir kontrol yasasının uygulanmasına ihtiyaç olduğu açıktır.

Sistem, dik dengesi etrafında doğrusallaştırılabilir. Bu, sistemin bu noktadaki davranışını tanımlayan basitleştirilmiş bir doğrusal versiyonunu elde etmenin mümkün olduğu anlamına gelir. Böylece, sisteme uygulandığında onu dik

konumda dengede tutabilecek bir kontrol yasası tasarlamak için bu basitleştirilmiş versiyonla çalışabiliriz. $\dot{x} = f(x, u)$ ile tanımlanan doğrusal olmayan sistem için, dik denge noktasıdır.

$$x = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (65)$$

Bu noktadan küçük sapmalar için θ_1 açısı çok küçüktür, dolayısıyla $\sin(\theta_1) = \theta_1$, $\cos(\theta_1) = 1$ ve $\theta_{12} = 0$ yaklaşımlarını yapabiliriz, bakınız [13]. Bu yaklaşımlar altında sistem olur

$$\begin{bmatrix} m_0 + m_1 & m_1 l_1 \\ m_1 l_1 & m_1 l_1^2 + I \end{bmatrix} \ddot{\theta} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 g l_1 \end{bmatrix} \theta = Hu \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} m_0 + m_1 & m_1 l_1 \\ m_1 \frac{L}{2} & m_1 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + I \end{bmatrix} \ddot{\theta} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_1 g \frac{L}{2} \end{bmatrix} \theta = Hu \quad (67)$$

$\{M\}$ $\{G\}$

$$\ddot{\theta} = -M^{-1}G\theta + M^{-1}Hu \quad (68)$$

Veya eşdeğer olarak durum uzayı formunda

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (69)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gL^2 m_1^2}{L^2 m_0 m_1 + 4I(m_0 + m_1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2gLm_1(m_0 + m_1)}{L^2 m_0 m_1 + 4I(m_0 + m_1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4I + L^2 m_1}{L^2 m_0 m_1 + 4I(m_0 + m_1)} \\ -\frac{2Lm_1}{L^2 m_0 m_1 + 4I(m_0 + m_1)} \end{bmatrix}$$

Bu sistem doğrusaldır ve A ve B matrisleri zamanla değişmezdir.

Genel olarak r girişli, m çıkışlı bir sistemin durum denklemleri ve çıkış denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Kafetzis ve Moysis, 2017).

Burada;

x : Durum vektörü (n elemanlı sütun vektörü)

u : Kontrol vektörü (r elemanlı sütun vektörü)

y : Çıkış vektörü (m elemanlı sütun vektörü)

A : Sistem matrisi (nxn elemanlı matris)

B : Giriş matrisi (nxr elemanlı matris)

C : Çıkış matrisi ($m \times n$ elemanlı matris)

D : Doğrudan iletim matrisi ($n \times r$ elemanlı matris) olarak adlandırılır.

Sistemin matris formundaki durum-uzay gösterimi ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gL^2m_1^2}{L^2m_0m_1 + 4I(m_0 + m_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2gLm_1(m_0 + m_1)}{L^2m_0m_1 + 4I(m_0 + m_1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4I + L^2m_1}{L^2m_0m_1 + 4I(m_0 + m_1)} \\ -\frac{2Lm_1}{L^2m_0m_1 + 4I(m_0 + m_1)} \end{bmatrix} u \quad (70)$$

Durumlarımız;

x : Arabanın konumu,

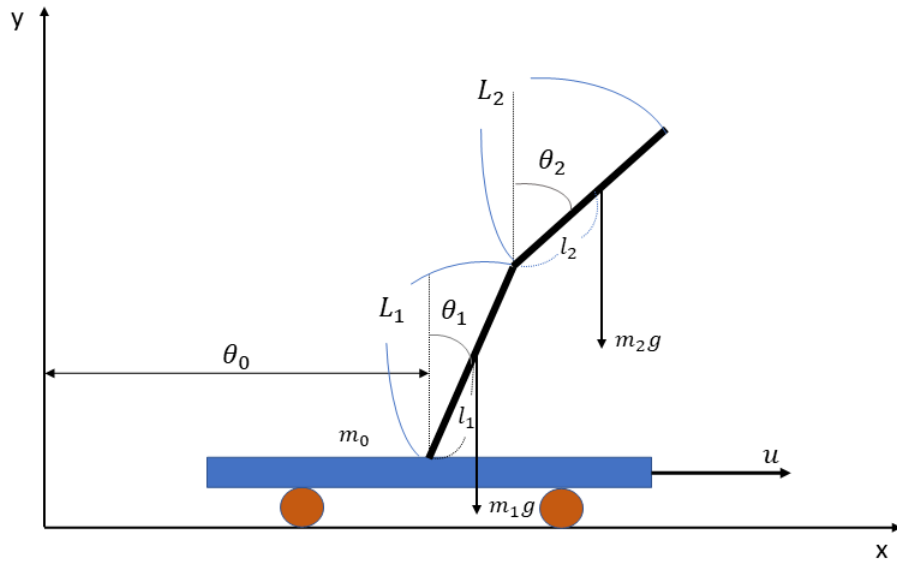
\dot{x} : Arabanın yatay eksendeki doğrusal hızı,

θ : Sarkacın düşey eksenle yaptığı açı,

$\dot{\theta}$: Sarkacın açısal hızıdır.

3.2.2. Araç Üzeri Çift Ters Sarkaç Sistemleri

Araç üzeri çift ters sarkaç sistemi üç serbestlik derecesine sahip bir araba ve arabaya mesnetlenmiş ve serbest durumda döner hareket yapabilen bir alt sarkaç ve ilk sarkaca bağlı döner hareket yapabilen ikinci sarkaçtan oluşmaktadır.



Şekil 5. Araba Üzeri Çift Ters Sarkaç

(Kaynak: Bogdanov, 2004)

Aşağıdaki tabloda tez kapsamında kullanılan parametreler bulunmaktadır. Matematiksel modelleme hesaplanması için bu değerler ele alınmıştır.

Tablo 1. Araç üzeri çift ters sarkaç model parametreleri

(Kaynak: Önen, Çakan ve İlhan, 2019)

Değişken	Parametre (Birim)
m_0	1,5 (kg)
m_1	0,5 (kg)
m_2	0,75 (kg)
L_1	0,5 (m)
L_2	0,75 (m)
I_1	0,0416 (kgm ²)
I_2	0,14 (kgm ²)

a. Sistemin Modellenmesi ve Lagrange Denklemleri

DIPC sistemi Şekil 5'te grafiksel olarak gösterilmiştir. Hareket denklemlerini türetmek için, olası yollardan biri Lagrange denklemlerini kullanmaktır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q \quad (71)$$

Burada $L = T - P$ bir Lagrange, Q , genelleştirilmiş koordinatlar θ yönünde hareket eden ve kinetik enerji T ve potansiyel enerji P formülasyonunda hesaba katılmayan genelleştirilmiş kuvvetlerin veya momentlerin bir vektörüdür. Sistem, bireysel bileşenlerinin yani tekerlekli bir araç ve iki sarkaç enerjilerinin toplamı ile verilir:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad (72)$$

$$P = P_0 + P_1 + P_2 \quad (73)$$

Kinetik enerji:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2 \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1 \left[(\dot{\theta}_0 + l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + I_1)\dot{\theta}_1^2 + m_1l_1\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \cos \theta_1
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m_2 \left[(\dot{\theta}_0 + L_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \right. \\
&\quad \left. + (L_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2l_2^2 + I_2)\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + m_1L_1\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2l_2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\
&\quad + m_2L_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned} \tag{76}$$

$$P_0 = 0 \tag{77}$$

$$P_1 = m_1gl_1 \cos \theta_1 \tag{78}$$

$$P_2 = m_2g(L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \tag{79}$$

Böylece sistemin Lagrangian'ı şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2L_1^2 + I_1)\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(m_2l_2^2 + I_2)\dot{\theta}_2^2 + (m_1l_1 + m_2L_1) \cos(\theta_1)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \\
&\quad + m_2l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 \\
&\quad + m_2L_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\
&\quad - (m_1l_1 + m_2L_1)g \cos \theta_1 - m_2l_2g \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{80}$$

Lagrange'ı $\dot{\theta}$ ve θ ile türevlendirmek, Lagrange denklemini (81) şu şekilde verir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = u \tag{81}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \tag{82}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (83)$$

Veya açıkça,

$$u = \left(\sum m_i \right) \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos(\theta_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \quad (84)$$

$$0 = (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos(\theta_1) \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1 \quad (85)$$

$$0 = m_2 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2 \quad (86)$$

b. Lineerleştirme

Sistem denklemlerinin belirli denge noktaları etrafında lineerleştirilmesi yapılmıştır. Düşey kararsız dengede sistemi alarak doğrusallaştırılır (Jibril, 2020).

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \quad (87)$$

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1 \quad (88)$$

$$\sin \theta_1 = \theta_1 \quad (89)$$

$$\sin \theta_2 = \theta_2 \quad (90)$$

$$\theta_1 - \theta_2 = 0 \quad (91)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \quad (92)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \theta_1 - \theta_2 \quad (93)$$

$$\dot{\theta}_1^2 = \dot{\theta}_2^2 = 0 \quad (94)$$

Böylelikle hareket denklemi bulunur.

$$\begin{aligned}
(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1)\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 &= u \\
(m_1 l_1 + m_2 L_1)\ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1)\ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \\
- (m_1 l_1 + m_2 L_1)g\theta_1 &= 0
\end{aligned} \tag{95}$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_0 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_2)\ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0 \tag{96}$$

c. Durum-Uzay Modeli

Çift ters çevrilmiş sarkaç dinamiği sisteminin durum uzayı temsili, Tablo 1'deki değişkenler ele alınarak önceden doğrusallaştırılmış iki denklemden türetilbilir (Önen ve diğerleri, 2019).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.192 & 0 & -0.7120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 81.206 & 0 & -71.173 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -88.35 & 0 & 124.788 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05933 \\ 0 \\ 3.0112 \\ 0 \\ -3.2763 \end{bmatrix}$$

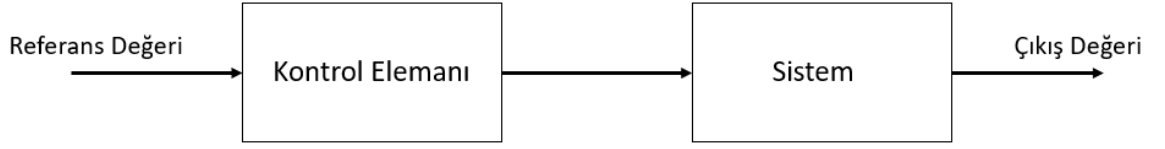
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3. Kontrolcü Sistemlerinin Analizi ve Tasarımı

3.3.1. Kontrolcü Tasarımlarının Analizi

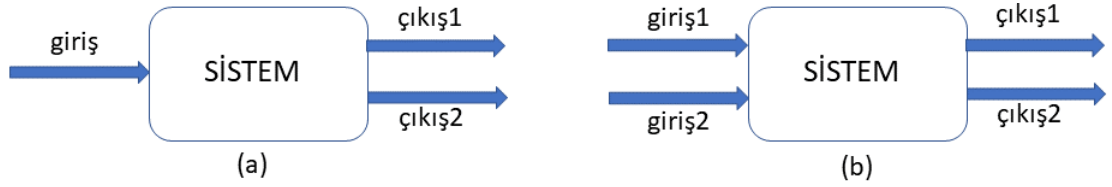
Kontrol sistemlerinde birden çok eleman bulunabilir. Sistemin çeşidine ve işlevine bağlı olarak kontrol sisteminde bulunan eleman sayısı değişiklik göstermektedir. Kontrol sisteminin tamamlayan elemanlardan oluşan bütünlüğe blok diyagramı denilmektedir. Bu kontrol sistemleri açık çevrim kontrol sistemi ve kapalı çevrim kontrol sistemi olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

Açık çevrim kontrol sistemlerinde sistem modelinin çıkışından herhangi bir geri besleme yoktur. Bu yüzden sistemdeki kontrolcü sisteme etki eden dış etkiyi veya değişikliği gideremez. Gerekli görülen referans değeri mevcut ise kararlı şekilde tutmak için geri besleme bulunmamaktadır. Şekil 6'da açık çevrim blok diyagramı gösterilmektedir.



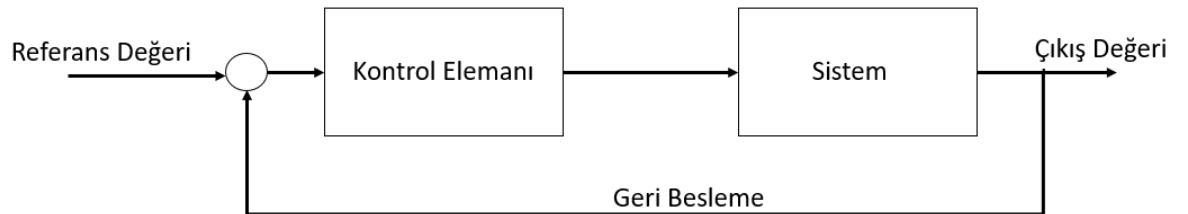
Şekil 6. Açık çevrim kontrol sisteminin blok şeması

Açık çevrim kontrol sistemleri aynı zamanda, giriş çıkış durumlarına göre de ayrılabilir. Buna göre sistemler tek giriş tek çıkış (TGTÇ), çok giriş tek çıkış (ÇGTÇ), tek giriş çok çıkış (TGÇÇ) ve çok giriş çok çıkış (ÇGÇÇ) olarak ele alınabilir. Literatürde tek giriş tek çıkış sistemler ve çok giriş çok çıkış sistemler oldukça yaygın kullanılmıştır (Nesimioğlu, Yılmaz ve Dincel, 2016).



Şekil 7. (a) Açık çevrim TGÇÇ sistem gösterimi, (b) Açık çevrim ÇGÇÇ sistem gösterimi.

Kapalı çevrim kontrol sistemlerinde, sistemden ölçülen değerlere göre bir geri besleme alınır. Böylelikle sistemdeki negatif etkiler oluşturulan bu tasarımlar sayesinde giderilmektedir. Kapalı çevrim kontrol sistemleri geri beslemesi olduğundan dolayı geri beslemeli kontrol olarak da adlandırılır ve kontrol yöntemlerinin birçoğu bu gruba dahildir. Endüstriyel alanda kullanımının oldukça yaygın olduğu gözlenmiştir. Açık çevrim kontrol sistemlerine göre doğruluk oranları oldukça yüksektir ve bu nedenden dolayı avantajlı bir metottür. Şekil 8 ile kapalı çevrim kontrol sistemini ve blok diyagramı gösterilmektedir.



Şekil 8. Kapalı çevrim kontrol sisteminin blok şeması

Şekil 8'deki kapalı çevrim blok sistemin daha doğru cevap vermesi için kontrol elemanı kullanılmıştır. Kontrolcüler tek çeşit değildir ve çıkış boyutuna, hassasiyetine ve

konumuna göre çeşitlilik göstermektedir. İyi bir kontrolcü tasarlamak için sistemin ne işlem görmesi gerektiği ve nasıl yapması gerektiği gözetilmelidir. Araç üzeri ters sarkaç sisteminde yapılması istenen sarkacın dikey bir pozisyonda kalmasıdır. Kontrol sisteminin nasıl çalıştırılacağı belirlenecek olursa: aktif kolun dairesel yörüngede ivmelenmesiyle sarkacı istenen pozisyona getirmesi olarak belirlenmiştir. Bu bilgilere dayanarak lineer kuadratik regülatör (LQR), Bulanık mantık-LQR ve PD kontrolör tasarımı yapılmıştır. Bu bölümde döner ters sarkaç sisteminin ilk olarak kontrol edilebilirliği, gözlenebilirliği bulunup incelenecektir. Bu incelemeler sonucunda toplanan verilerden faydalanılarak LQR ile kontrolör tasarımı yapılacaktır. Bu tasarımlar ve incelemeler gerçekleştirilmeden önce sistemin deneysel olarak gözlemlenebilecektir. Bu durumda araba üzeri ters sarkaç sistemine ait fiziksel parametreleri içeren durum uzay denklemleri belirtilmelidir veya ADAMS veya Multibody Dynamics'te modellenmesi yapılmalıdır.

3.3.1.1. Kontrol edilebilirlik

Denklem (97)'de ifadesi ile verilen n. mertebeden bir sistemin kontrol edilebilir olması için

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (97)$$

Biçiminde tanımlanan n. mertebeden C kontrol edilebilirlik matrisinin rankının n olması, yani başka bir deyişle, tek giriş-çıkışlı bir sistem için,

$$\det(C) \neq 0 \quad (98)$$

Şartını sağlaması gerekir. İncelenen sistem 4. mertebeden olduğundan kontrol edilebilirlik matrisi,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (99)$$

Şeklindedir ve;

$$\det(C) = 81 \frac{g^2}{l^4(4M + m)^4} \quad (100)$$

Olarak elde edilir ve bu ifade her zaman sıfırdan farklıdır.

Çift ters sarkaç için sistemimiz 6. dereceden olduğundan kontrol edilebilirlik matrisi (101)'deki gibidir.

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B] \quad (101)$$

Sistemin kontrol edilebilir olması için kontrol edilebilirlik matrisinin rankı 6 olmalıdır. Bu durumda C bir kare matris olduğundan ve;

$$\det(C) \neq 0 \quad (102)$$

C'nin determinanı sıfıra eşit olmadığından kontrol edilebilirlik matrisinin rankı 6'dır ve sistem kontrol edilebilirdir.

3.3.1.2. Doğrusallaştırma

Doğrusal olmayan bir sistemin içerisindeki doğrusal olmayan terimleri belirli kurallar çerçevesinde Taylor serileri yardımıyla basitleştirerek sistemi lineer bir şekle getirme işlemine doğrusallaştırma adı verilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir a değeri civarındaki lineer ifadesi bu ifadenin Taylor serisinin ilk iki terimi yani, (103) ifadesinden elde edilir.

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x - a) + \dots \quad (103)$$

Bu şekilde sistem, (104) şeklinde ifade edilebilecek bir hale gelir.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (104)$$

Bu kontrol yönteminde amaç sistemin doğrusallaştırılmış hali üzerinden bir kontrol kanunu geliştirdikten sonra bunu doğrusal olmayan sisteme uygulamaktır. Yani doğrusal olmayan sistemin davranışının lineer sisteme benzediği bölgede doğrusal olmayan olarak görünen sistemi, lineer bir sistem olarak taban alıp kontrol etme yöntemidir. Sınırlı doğrusal olmayan sistemlerde bu yöntem çok kullanışlıdır. Sınırlı doğrusal olmamaktan kasıt doğrusal olmayan bir sistem olmasına karşın değişkenlerin doğrusal kabulü yapılabilecek bir bölge içerisinde değişmesidir. Örneğin taşıt dinamiğinde normal

koşullarda taşıtın gövdesinin yapacağı sarsılma hareketinin paralel olması doğrusal kabulünün yapılabileceği bir aralıkta değişir.

3.3.1.3. Geri beslemeli kontrol

Kontrol kanunu yazılırken sistem içerisindeki tüm durumların göz önüne alındığı kontrol yöntemine tam durum geri beslemesi ile kontrol adı verilir. Bu kontrol yönteminin kullanılması sırasında tüm durumların ölçülmesinin güç, bazen imkânsız olması uygulama açısından bir sorun teşkil etmektedir. Gözlemleyici tasarlamak bu tip durumlarda kullanışlı bir yöntemdir. Sistemin bazı değişkenlerini ölçüp diğer 8 değişkenleri bu ölçülen değişkene bağlı olarak tahmin eden yapılara gözlemleyici adı verilir. Gözlemleyici kullanabilmek için öncelikle sistemin gözlemlenebilir olması gerekmektedir. Biz çalışmamız esnasında bir gözlemleyiciye ihtiyaç duymayacağımızı farz ediyoruz.

$$\dot{x} = A x + B u \quad (105)$$

Şeklindeki bir lineer sistemde tam durum geri beslemesi uygulandığında kontrol kanunu,

$$u = K x \quad (106)$$

Biçimindedir. Bu durumda sistem,

$$\dot{x} = (A + B K) x \quad (107)$$

Denklem (107)'deki halini alır ve kontrol edilen sistemin davranışını $A + BK$ matrisinin özdeğerlerini (kutuplar) tayin eder (Özbey, 2006).

3.3.2. Oransal-İntegral-Türevsel (PID) Kontrolcü Tasarımı

PID kontrolcü yöntemi, 1940'tan beri kullanılan ve hala yaygın olarak günümüzde kullanılan bir kontrol çeşididir. PID kontrolü ile hız, basınç, akış, sıcaklık ve benzeri işlemlerde değişkenlerini değiştirilerek kontrol işlemi sağlanır. Robotik alanlarda sarkaç veya motor kontrolü, insansız hava araçlarında uçuş kontrolü ve otomasyon sistemleri ve daha çok alan başta olmak üzere birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. PID kontrolcü oransal, integral ve türevsel kısımları olan ve bu üç parametrenin aktif olarak

ayarlanmasıyla kapalı çevrim sistem davranışı belirlenir ve uygulama işlemi gerçekleştirilir.



Şekil 9. PID Kontrolör Kapalı çevrim Blok Diagramı

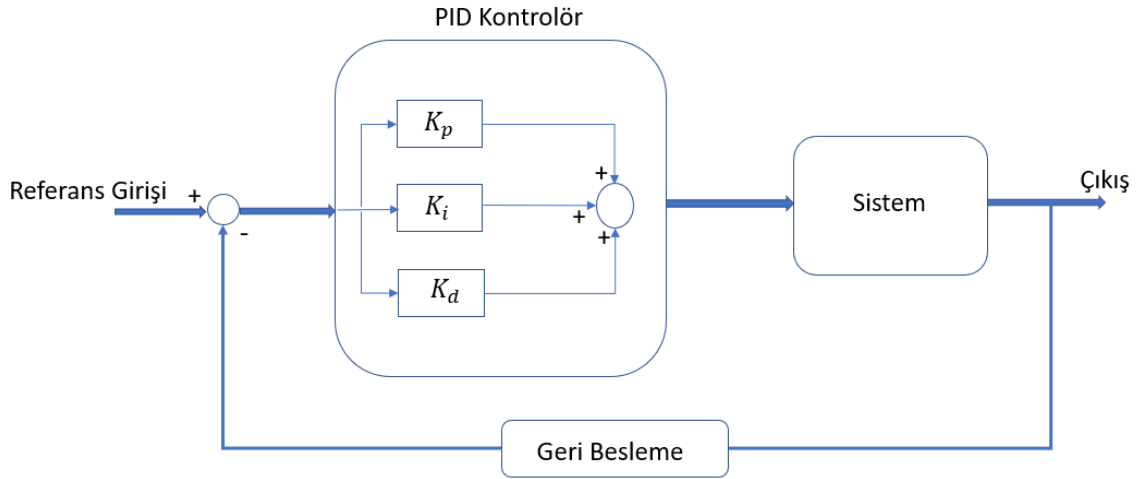
PID, Orantılı-İntegral-Türev anlamına gelir. Bu çıktısı, bir kontrol değişkeni (CV), genellikle kullanıcı tanımlı bir ayar noktası (SP) ile bazı ölçülen proses değişkeni (PV) arasındaki hataya (e) dayanan bir tür geri besleme kontrolörüdür. PID denetleyicisinin her bir ögesi, hata üzerinde gerçekleştirilen belirli bir eylemi ifade eder.

Oransal: bir kazançla çarpılan hata, K_p . Bu ayarlanabilir bir amplifikatördür. Birçok sistemde K_p , proses kararlılığından sorumludur: çok düşük ve işlem değişkeni uzaklaşabilir; çok yüksek ve işlem değişkeni salınım yapabilir.

İntegral: Bir kazançla çarpılan hatanın integrali, K_i . Birçok sistemde K_i , sürüş hatasını sıfıra indirmekten sorumludur, ancak K_i 'yi çok yüksek ayarlamak, salınımına veya kararsızlığına veya entegratörün kapanmasına veya aktüatör doygunluğuna neden olmaktadır.

Türev: Bir kazançla çarpılan hata değişim oranı, K_d . Birçok sistemde K_d , sistem yanıtından sorumludur: çok yüksek ve işlem değişkeni salınım yapacaktır; çok düşük ve işlem değişkeni ağır ağır yanıt verecektir. Tasarımcı ayrıca, türev eyleminin hata sinyalindeki herhangi bir gürültüyü yükselttiğine de dikkat etmelidir.

Bir PID'nin ayarlanması, sistem yanıtının uygun olması için tanımlı optimal karakterini elde etmek için K_p , K_i ve K_d 'nin ayarlanmasını içerir.



Şekil 10. PID Kontrolcünün Blok Şeması
 (“Introduction: PID Controller Design”, 2017)

Sistem: Bir sistem kontrol edilecek.

Kontrolcü: Genel sistem davranışını gereksinime göre kontrol etmek için tasarlanmıştır.

PID kontrolörünün transfer fonksiyonu şu şekildedir:

$$K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_p s + K_I + K_D s^2}{s} \quad (108)$$

k_p = Oransal kazanç

k_i = İntegral kazanç

k_d = Diferansiyel kazanç

Buradaki sistemde $e(t)$ giriş ve çıkış arasındaki hata sinyalini, $u(t)$ sisteme uygulanacak olan kontrol sinyalini, K_p oransal kazancı, T_d türevsel zaman sabitini, T_i integral zaman sabitini vermektedir. Denklem düzenlenecek olursa Denklem (108)'de olduğu gibi gösterilebilir.

Hata sinyali PID kontrolörüne gönderilir ve kontrolör hata sinyalinin hem türevini hem de integralini hesaplar. Kontrolörün hemen yanından geçen sinyal (u) şimdi orantılı kazanç (K_p) çarpı hatanın büyüklüğü artı integral kazancı (K_i) çarpı hatanın integrali artı türev kazancı (K_d) çarpı hatanın türevine eşittir.

$$u = K_p e + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de}{dt} \quad (109)$$

PID kontrolünde $K_d = K_p T_D$ ve $K_i = K_p / T_i$ olduğu anlaşılmaktadır. Verilen bu katsayılar ayrı ayrı sistemin çıkışını etkileyebilir, sistemden istenilen çıkış cevap değişimini veya performansı elde etmek için bu katsayılar optimum şekilde ayarlanmış olması gerekmektedir.

PID katsayılarından $K_d = 0$ ve K_i ile K_p katsayıları sıfırdan farklı değerde olursa PI kontrol, $K_i = 0$ olursa PD gibi farklı kontrolcüler üretilebilmektedir. Yani sistemin gerektirdiği ihtiyaca göre PID, PD, PI gibi farklı versiyonlarda kullanılabilir.

PID kontrol yöntemi, üç ana kazanç (K_p , K_i , K_d) birleşiminden oluşmaktadır. İntegral etkinin sistemdeki kalıcı durum hatasının azaltılması üzerinde etkisi bulunurken, türevsel etkinin ise sistemin kararlı hale ulaşma süresini kısaltması konusunda etkisi bulunmaktadır.

Sistemde istenilen cevabı alabilmek için, PID kontrolcüde tasarımında şu durumlara bakılır;

- Sistemin açık çevrim çıkışının bulunması ve daha sonra sistem cevabının iyileştirilebilmesi gerekli olan durumların belirlenmesi gerekmektedir.
 - Yükselme zamanının azalması için sisteme oransal kontrol (K_p) kazancının eklenmesi,
 - Maksimum aşma oranının azaltılması için sisteme türevsel kontrol (K_d) kazancının eklenmesi,
 - Kalıcı durum hatasının ortadan kaldırılması için sisteme integral kontrol (K_i) kazancının eklenmesi,
 - İstenilen cevap bulununcaya kadar K_p , K_i ve K_d kazançlarının ayarlanması gerekmektedir. Eğer sistem için istenilen sonuç PD kontrol ile karşılanabiliyorsa, sisteme integral kontrol (K_i) etkinin eklenmesine gerek yoktur. PID katsayılarının ayarlanabilmesi için aşağıda belirtilen bazı yöntemler geliştirilmiştir (Nise, 2011). Bu yöntemler şunlardır;
1. Katsayı Ayarlama Yöntemleri (Ziegler-Nichols, Cohen-Coon, Yuwana- Seborg),
 2. Frekans Cevabı Yöntemi,

3. Köklerin Yer Eğrisi (Root-Locus) Yöntemi'dir.

P, I ve D kontrolörlerinin özellikleri

Oransal denetleyici (K_p) yükselme süresini azaltma etkisine sahip olacaktır, ancak asla kararlı durum hatasını ortadan kaldırmaz. İntegral denetleyici (K_i) kararlı durum hatasını azaltacaktır ancak geçici durum yanıtını daha da kötüleştirebilir. Bir türev denetleyici (K_d) sistemin kararlılığı üzerinde bir etkiye sahip olacak, aşmayı azaltacak ve geçici tepkiyi iyileştirecektir. Bu üç kontrolörün etkileri tablo 2'de gösterildiği gibi özetlenebilir.

Tablo 2. P, I ve D Kontrolörlerin Karakteristikleri

(“Introduction: PID Controller Design”, 2017)

Kapalı Çevrim Cevabı	Yükseliş Zamanı	Yüzdesel Aşım	Ayarlama Zamanı	Kalıcı Durum Hatası
K_p	Azalar	Artar	Küçük değişim	Azalar
K_I	Azalar	Artar	Artar	Azalar
K_D	Küçük değişim	Azalar	Azalar	Değişim yok

3.3.3. LQR Kontrolcü Tasarımı

Bu bölümde Doğrusal Kuadratik Regülatör (LQR) kontrol tekniği açıklanmaktadır. Bu teknik, bir sistemi analiz etmek için durum-uzay yaklaşımı kullanır. Bu yöntem, durum geri besleme kontrol kazanç matrisini hesaplayan sistematik bir yolu sağlar. Optimal kontrolde, belirli bir performans ölçüsüne göre mümkün olan en iyi performansı sağlayan bir kontrolör bulunmaya çalışılır. Genel olarak, bazı kriterlere göre optimallik, bir kontrolör için istenen tek özellik değildir. Ayrıca kapalı döngü sisteminin istikrarı da istenebilir.

Şimdi sistem denklemini verilen optimal regülatör problemini ele alacağız.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (110)$$

Optimal kontrol vektörünün K matrisini belirler

$$u(t) = -Kx(t) \quad (111)$$

LQR, endüstrinin çeşitli alanlarında yaygın olarak kullanılan lineer sistemler için optimal bir durum-uzay geri besleme kontrolörüdür. LQR, optimal bir kontrol girdisini hesaplamak için durum değişkenlerini ve performans indeksi J'yi kullanır. Denklem'de verilen lineer durum-uzay denklemini göz önüne alındığında, LQR'nin amacı, tarafından verilen performans indeksi J'yi en aza indiren optimal kontrol yasasını $u=K:(ref-x)$ belirlemektir.

Bir durum geri besleme matrisi tasarlamak için ters çevrilmiş sarkaç durum denklemine doğrusal ikinci dereceden optimal kontrol teorisi (LQR). İkinci dereceden performans indeksi fonksiyonunun kontrolüne izin verir:

$$J = \int_0^{\infty} (q_{ref}(t) - q(t))^T Q (q_{ref}(t) - q(t)) + u(t)^T R u(t) dt \quad (112)$$

Minimum ve sistemi sıfıra yakın duruma getirir. Q yarı belirli gerçek simetrik sabit matris olduğunda; R, pozitif tanımlı gerçek simetrik sabit matristir; Q ve R sırasıyla X ve U'nun ağırlık matrisidir.

Optimal kontrol teorisine göre, optimal kontrol için en küçük ikinci dereceden performans indeksi fonksiyonunu U^* yapmak için:

$$U^* = -R^{-1}B^T P X = -KX \quad (113)$$

P, Riccati denkleminin çözümü olduğunda, K lineer bir optimal geri besleme kazanç matrisidir. Bu denklemde P, denklemde verilen cebirsel Riccati denkleminin çözümünden elde edilen pozitif tanımlı simetrik sabit bir matristir.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (114)$$

Hareketin gereksinimlerine göre, ana öncelik, üst kısmı sabitlemektir. Hem ikinci hem de son olarak yatay yer değiştirme sistemini düşünmek olmalıdır. LQR kontrolör tasarımı, sistem girişi, performans indeksi J'yi azaltmak için Q ve R diyagonal matrisleri kullanılarak hesaplanır. Simetrik pozitif yarı tanımlı matris Q ve simetrik pozitif tanımlı matris R aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & q_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & r_m \end{bmatrix}$$

Temel olarak, matris Q, kontrol etkisinin durumlar üzerindeki dağılımını ayarlarken, matris R, kontrolün agresifliğini ayarlar. LQR kazanç vektörü K şu şekilde ifade edilir:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (115)$$

Optimum geri besleme kazancı matrisi denklem (115)'da hesaplanır:

$$K = [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6] = [k_x, k_{\theta_1}, k_{\theta_2}, k_{\dot{x}}, k_{\dot{\theta}_1}, k_{\dot{\theta}_2}] \quad (116)$$

Kontrolörün çıktısı, arabaya uygulanan kuvvettir (u). LQR denetleyicisi, kontrol kuvveti u'yu kazanç vektörü K'ya göre hesaplar. Optimizasyon algoritmaları, Q ve R matrislerini optimize etmek ve LQR denetleyicisinin en iyi kazanç vektörü K'yi belirlemek için sistemin amaç fonksiyonunu ve giriş-çıkış çiftlerini kullanır.

Daha uygun parametreler olduğunda. Bu noktada durum geri besleme matrisi:

$$k_1 = 9.99999999999939$$

$$k_2 = 13.0931941661482$$

$$k_3 = -57.8839116498531$$

$$k_4 = -31.6292745878411$$

$$k_5 = -328.249203647472$$

$$k_6 = -26.5546862939312$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5 \quad k_6] \quad (117)$$

LQR Örnek: (Ogata, 2009)

Optimum kontrol sinyali u , $u = -Kx$ şeklinde olacaktır. Bu nedenle, performans indeksi J olur.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T x + u^2) dt = \int_0^{\infty} x^T (I + K^T K) x dt \quad (118)$$

Bu problemde $R=I$ olduğundan, Denklem olur şu şekilde olur:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(I + K^T K) \quad (119)$$

Buradan K şu şekilde elde edilir:

$$K = R^{-1} B^T P = B^T P \quad (120)$$

P , indirgenmiş matris Riccati denkleminde belirlenir:

$$A^T P + PA - PBB^T P + I = 0 \quad (121)$$

Pozitif tanımlı olmasını gerektiren P 'yi çözerek elde ederiz.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (122)$$

Optimal geri besleme kazanç matrisi K olur.

$$K = B^T P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (123)$$

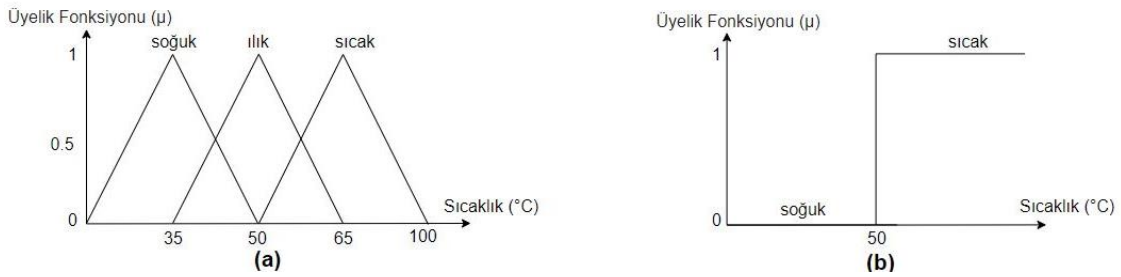
Böylece optimal kontrol sinyali u şu şekilde verilir:

$$u = -K x = -x_1 - x_2 \quad (124)$$

3.3.4. Bulanık Mantık-LQR Kontrolcü Tasarımı

3.3.4.1. Bulanık Mantık

Bulanık Mantık Denetleyicisi (FLC) kavramı, Berkley'deki California Üniversitesi'nde profesör olan Lotfi Zadeh tarafından tasarlandı ve bir kontrol metodolojisi olarak değil, kesin küme üyeliği yerine kısmi küme üyeliğine veya üye olmamaya izin vererek veri işlemenin bir yolu olarak sunuldu. Küme teorisine yönelik bu yaklaşım, o zamandan önce yetersiz küçük bilgisayar kapasitesi nedeniyle 70'lere kadar kontrol sistemlerine uygulanmadı. Profesör Zadeh, insanların kesin, sayısal bilgi girişine ihtiyaç duymadıklarını ve yine de yüksek oranda uyarlanabilir kontrol yeteneğine sahip olduklarını düşündü. Geri besleme kontrolörleri gürültülü, kesin olmayan girdileri kabul edecek şekilde programlanabilseydi, çok daha etkili ve belki de uygulanması daha kolay olurdu. (BIN NASIR, 2007)



Şekil 11. (a) Sıcaklık değişkenine ait bulanık mantık ifadesi, **(b)** sıcaklık değişkenine ait ikili mantık ifadesi (Ay, 2021).

Şekil 11'de örneği verilen duyu ikili mantıkta sıcak ya da soğuk ifadeleri içerisinde sadece bir ifade grubuna üye olarak bulunabilirken; bulanık mantık yapısında sıcaklık, farklı sıcaklık kümelerine genellikle $[0, 1]$ arasında olan üyelik fonksiyonu değeriyle belli düzeyde üye olabilir. Bulanık mantığa göre, elemanlar dereceli olarak çoklu biçimde kullanılabilir. (Zadeh, 1975)

3.3.4.2. Bulanık Mantık Kontrol

Bu bağlamda bulanık mantık kontrol (FLC), küçük, gömülü mikro denetleyicilerden büyük, ağ bağlantılı, çok kanallı PC veya iş istasyonu tabanlı veri toplama ve kontrol sistemlerine kadar değişen sistemlerde uygulamaya olanak tanıyan bir problem çözücü kontrol sistemi metodolojisidir. Donanımda, yazılımda veya her ikisinin bir

kombinasyonunda uygulanabilir. FLC, belirsiz, kesin olmayan, gürültülü veya eksik girdi bilgilerine dayalı olarak kesin bir sonuca varmak için basit bir yol sağlar. FLC'nin sorunları kontrol etme yaklaşımı, bir kişinin nasıl karar vereceğini taklit eder, yalnızca çok daha hızlı (Chen, Fang ve Lei, 1998).

Bulanık mantık fikri kontrole uygulandığında genellikle 'bulanık kontrol' olarak adlandırılır. Bulanık kontrol, bulanık mantığın uygulandığı bilinen ilk kontroldür. Çimento fırınlarının, elektrikli trenlerin, su arıtma tesislerinin kontrolü gibi ana uygulama alanları çoktur. Özellikle Japonya'da birçok araştırma faaliyeti ve uygulama devam etmektedir.

3.3.4.3. Bulanık Kontrol Kurallarının Şekli ve Çıkarım Yöntemi

Bulanık kontrol, proses kontrolü için algoritmayı, kontrol edilecek prosesin durumu, x ve y ile prosesin girdisi (iş miktarı) arasındaki bulanık bir ilişki olarak tanımlar. Kontrol algoritması, IF - THEN ifadesinde aşağıdaki gibi verilmiştir.

x küçük ve y büyükse z ortadır.

x büyük ve y orta ise, z büyüktür.

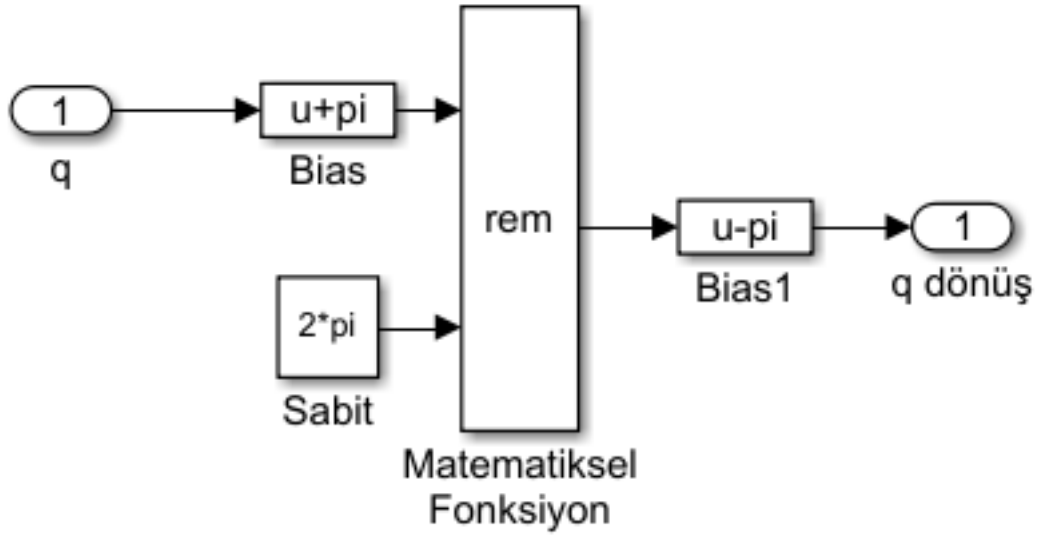
Yukarıdaki ifade, Şekil 5.2'de gösterildiği gibi başka bir ifadeye basitleştirilebilir.

4. BİR TERS SARKAÇ SİSTEMİNİN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

4.1. Araç Üzeri Çift Ters Sarkaç Sisteminin Modellenmesi

Simscape Multibody, robotlar, araç süspansiyonları, araç ekipmanları gibi 3B mekanik sistemler için çok gövdeli bir simülasyon ortamı sağlar. Bu tez kapsamında ise araç üzeri çift ters sarkaç sistemi modellenmesi EK1’de gösterildiği gibi Simscape Multibody ile sağlanmıştır. Araç gövdesi bloğu eklenmiştir ve bu blokta çalışma alanı tanımlanmıştır. Bu çalışma alanında araca giriş olarak verilen sinyal bulunmaktadır. Araçtan çıkış olarak yer değişimi ve hız tanımlanmıştır. Araç üzerinde iki uç uca döner sarkaçlar eklenmiştir. Bu döner sarkaçlar için girişler ilk sarkaç için araçtan gelen eylemsizlik kuvveti ve ikinci sarkaç için araca bağlı sarkacın eylemsizlik kuvveti etkilemektedir. Böylelikle gövdeleri, eklemleri, sarkaçları, kısıtlamaları ve kuvvet öğelerini temsil eden blokları EK1’deki gibi kullanarak hareket eden sistem modellenmiş ve iki boyutlu animasyon olarak görselleştirilmesi sağlanmıştır.

Sarkaç dönme açısının hesaplanması için Dönme Açısı1 ve Dönme Açısı 2 adı altında iki alt sistem Şekil 11’deki gibi bulunmaktadır.

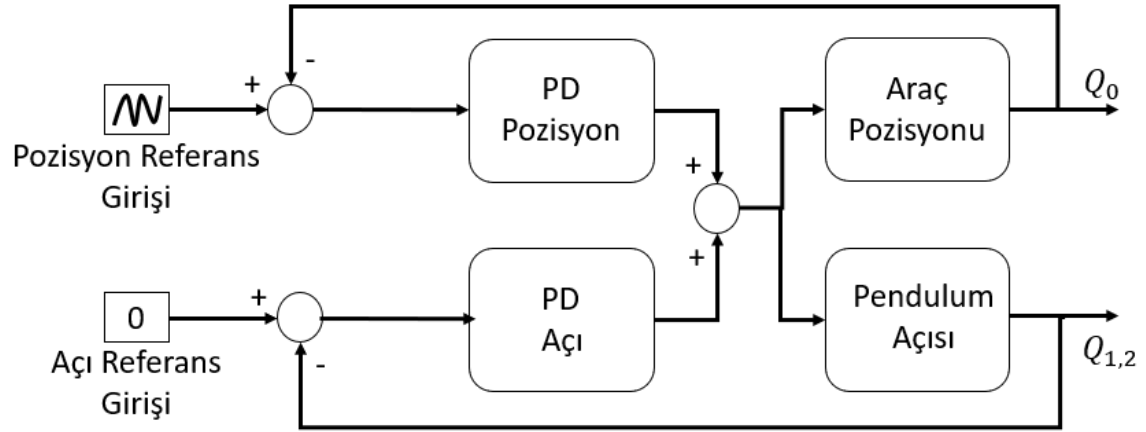


Şekil 11. Dönme Açısı Hesaplanması Alt Sistemi

4.2. Kontrol Uygulamaları

4.2.1. PD Kontrolcü Tasarımı

Tez çalışmasının bu kısmında iki adet PD kontrolcü tasarımı yapılmıştır. Araç pozisyonu için ayrı, sarkaç açıları için ayrı PD olmak üzere iki tane PD tasarlanmıştır. PD kontrolcü kullanılarak meydana getirilen sistemin kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 'de gösterilmiştir.



Şekil 12. Tek Giriş Çok Çıkışlı Kontrol Sistemi Yaklaşımı

Sistemde gerekli kontrolcü sinyalleri araç yer değiştirme ve sarkaçlar açıları için sağlanır. Daha sonra simulinkte eklenen P ve D değerleri için MATLAB/Response Optimization Toolbox yazılımı kullanılarak belirlenmiştir. P ve D değerleri araç ve sarkaçlar için aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Araç pozisyonu için PD kontrolcü özellikleri:

- k_p (Oransal kazanç): 2036.62486400523
- k_d (Diferansiyel kazanç): 186.838975022877
- N (Filtre katsayısı): 142354.774653615

Sarkaç açıları için PD kontrolcü özellikleri:

- k_p (Oransal kazanç): -662380.673349872
- k_d (Diferansiyel kazanç): 0.000965120354019359
- N (Filtre katsayısı): 2729.39565867907

4.2.2. LQR Kontrolcü Tasarımı

Araç üzerinde çift ters sarkaç kontrolünde kullanılmak üzere tasarlanan her iki PID kontrolcü MATLAB/Simulink/Control Toolbox/Gain bloğu eklenmiştir. LQR kontrolcü kullanılarak meydana getirilen sistemin kapalı çevrim blok diyagramı Şekil'de gösterilmiştir. Buna göre araca uygulanan referans sinyali 5. Saniyeye kadar 5 metre kalan 5 saniye ise başlangıç noktası yani 0 metre olarak konumu olarak verilmiştir.

Kontrolörün çıktısı, arabaya uygulanan kuvvettir (u). LQR denetleyicisi, kontrol kuvveti u 'yu kazanç vektörü K 'ye göre hesaplar. Optimizasyon algoritmaları, Q ve R matrislerini optimize etmek ve LQR denetleyicisinin en iyi kazanç vektörü K 'yi belirlemek için sistemin amaç fonksiyonunu ve giriş-çıkış çiftlerini kullanır.

Daha uygun parametreler olduğunda. Bu noktada durum geri besleme matrisi:

$$k_1 = 9.99999999999939$$

$$k_2 = 13.0931941661482$$

$$k_3 = -57.8839116498531$$

$$k_4 = -31.6292745878411$$

$$k_5 = -328.249203647472$$

$$k_6 = -26.5546862939312$$

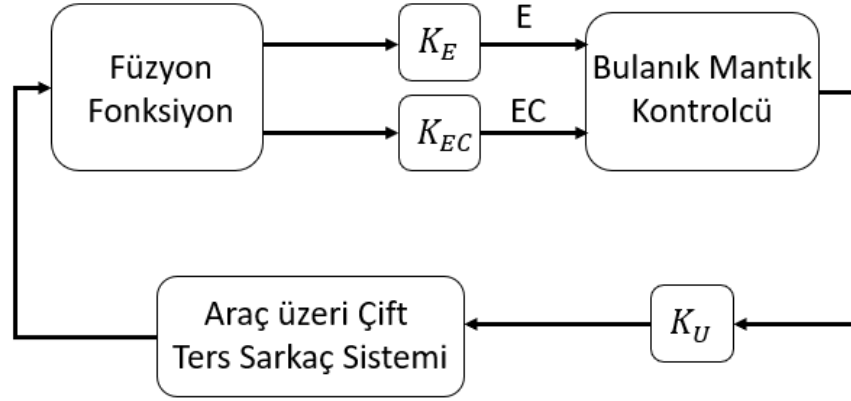
$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5 \quad k_6] \quad (117)$$

4.2.3. Bulanık Mantık-LQR Kontrolcü Tasarımı

Ters sarkaç sistemi, tipik birçok değişkenli, doğrusal olmayan, güçlü bağlantı ve hızlı hareket, yüksek seviye ve kararsız bir sistemdir ve kontrol teorisi yöntemlerinin ideal bir testidir. Özellikle çift ters çevrilmiş sarkaç sisteminin stabilite kontrolü daha zor ve daha güçlüdür. Bilgi füzyonuna dayalı sistem boyutu, kontrolör tasarımını büyük ölçüde basitleştirdi. Bu yazıda, Lagrange'a dayalı çift ters çevrilmiş sarkaç modeli, kontrol edilen nesnedir, optimal kontrol teorisini kullanır, sistemin boyutsallığını azaltmak için füzyon fonksiyonu kullanılarak durum geri bildirimini ile sistemin kutup ataması elde edilir. Uygun bir bulanık kontrolör tasarlanmıştır. Simülasyon sonuçları, bilgi füzyonuna dayalı çift ters

çevrilmiş sarkaç sisteminin bulanık kontrol yönteminin, algoritmanın uygulanabilirliğini doğrulamak için iyi yanıt özelliklerine sahip olduğunu göstermektedir.

Çift ters çevrilmiş sarkacın bulanık kontrol sistemi Şekil 13'te gösterilmektedir.



Şekil 13. Bulanık Mantık Uygulanan Sistemin Blok Diyagramı

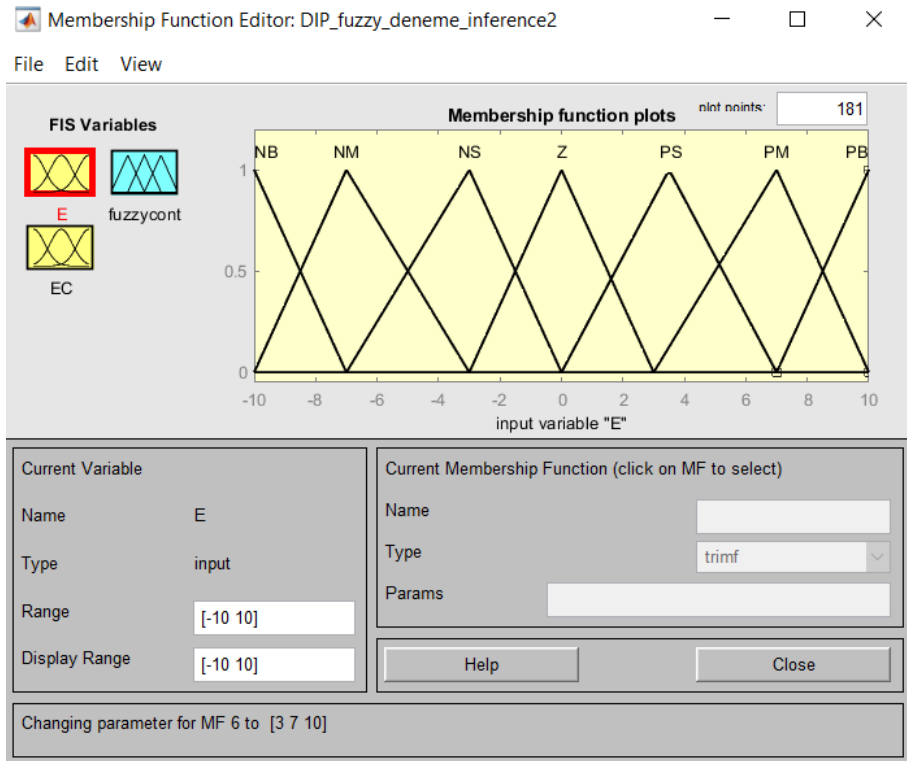
Tez kapsamında yapılan bu kontrolör şemasında kullanılan bulanık kontrolör için giriş olarak tanımlanan sistemin hatası ve hata türevi değerleri, alt değer -1 ve üst değer +1 kabul edilerek, bu değerler arasında 7 adet üçgen tip bulanık kümelerle bölünmüşlerdir. Ek olarak üçgen tip bulanık üyelik fonksiyonunun yapısı gereğince hem hata hem de hata türevi değişkenleri için ortak olarak ele alınan tüm bulanık kümelerle ilgili dilsel ifadeleri, sembolleri, alt, tepe ve üst değerleri ile üyelik fonksiyonu tipleri detaylı olarak aşağıda verilen Tablo 3 üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 3. Tez kapsamında kullanılan bulanık kontrolör girişlerine ait bulanık kural değer tablosu.

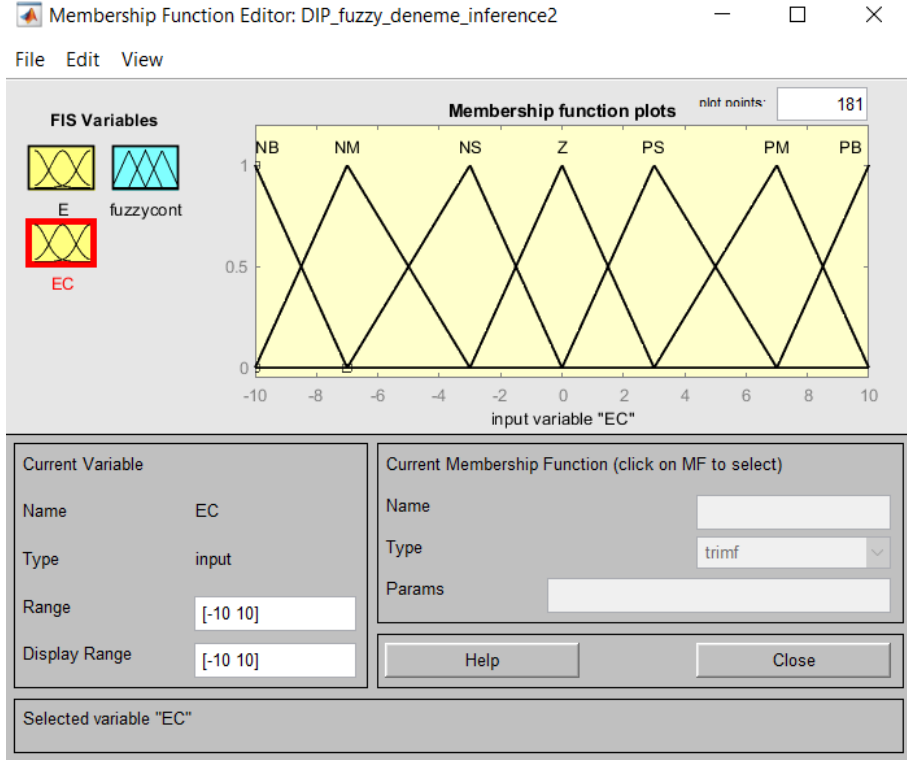
Dilsel İfade	Sembol	Alt Değer	Tepe Değeri	Üst Değer	Üyelik Fonksiyonu Türü
Negatif Büyük	NB	-10	-10	-7	Üçgen tip
Negatif Orta	NM	-10	-7	-3	Üçgen tip

Negatif Küçük	NS	-7	-3	0	Üçgen tip
Sıfır	Z	-3	0	3	Üçgen tip
Pozitif Küçük	PS	0	3,5	7	Üçgen tip
Pozitif Orta	PM	3	7	10	Üçgen tip
Pozitif Büyük	PB	7	10	10	Üçgen tip

Parametreleri verilen üyelik fonksiyonlarının MATLAB üzerinde bulanık mantık ara yüzü kullanılarak oluşturulmuş biçimleri de sırasıyla hata ve hata türevi için aşağıda verilen Şekil 14 ve 15 üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 14. Hata değişkeni için MATLAB bulanık küme gösterimi.



Şekil 15. Hata türevi değişkeni için MATLAB bulanık küme gösterimi.

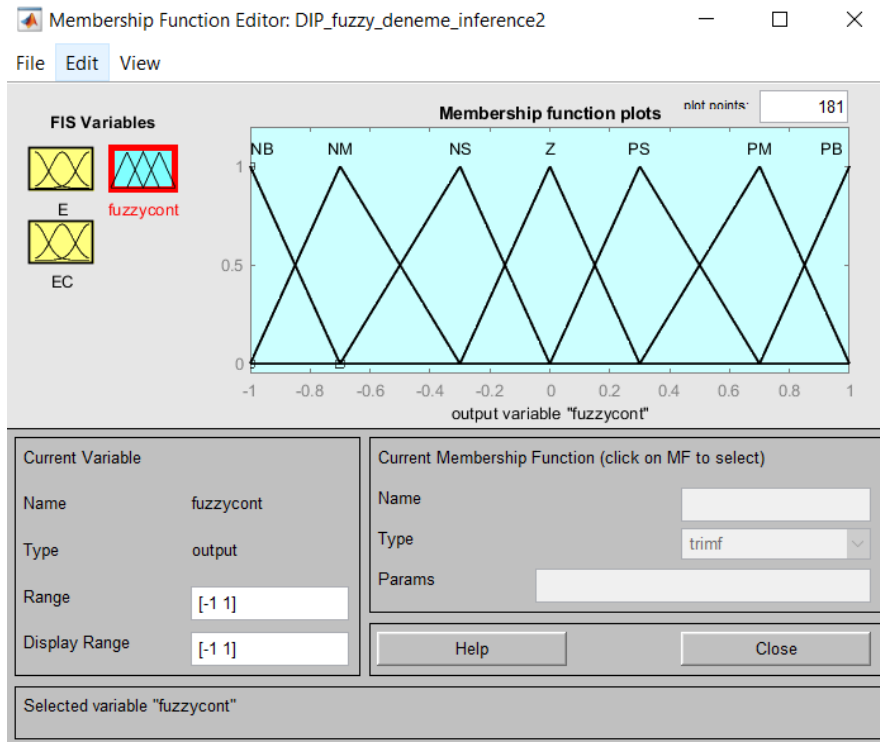
Kümeleri verilen bulanık girişlerin neticesinde bulanık kontrolörde çıkış olarak tanımlanan kontrol işareti bulanık kümesi için kullanılan yedi üyelik fonksiyonuna ait, dilsel ifadeleri, sembolleri, değerleri ve üyelik fonksiyonu türü detaylı olarak aşağıda verilen Tablo 4 üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 4. Tez kapsamında kullanılan bulanık kontrolör çıkışına ait bulanık kural değer tablosu.

Dilsel İfade	Sembol	Alt Değer	Tepe Değeri	Üst Değer	Üyelik Fonksiyonu Türü
Negatif Büyük	NB	-1	-1	-0,7	Üçgen tip
Negatif Orta	NM	-1	-0,7	-0,3	Üçgen tip

Negatif Küçük	NS	-0,7	-0,3	0	Üçgen tip
Sıfır	Z	-0,3	0	0,3	Üçgen tip
Pozitif Küçük	PS	0	0,3	0,7	Üçgen tip
Pozitif Orta	PM	0,3	0,7	1	Üçgen tip
Pozitif Büyük	PB	0,7	1	1	Üçgen tip

Parametreleri verilen çıkış üyelik fonksiyonlarının MATLAB üzerinde bulanık mantık ara yüzü kullanılarak oluşturulmuş biçimi de tanımlanan sabitler neticesinde aşağıda verilen Şekil 16 üzerinde gösterilmiştir.



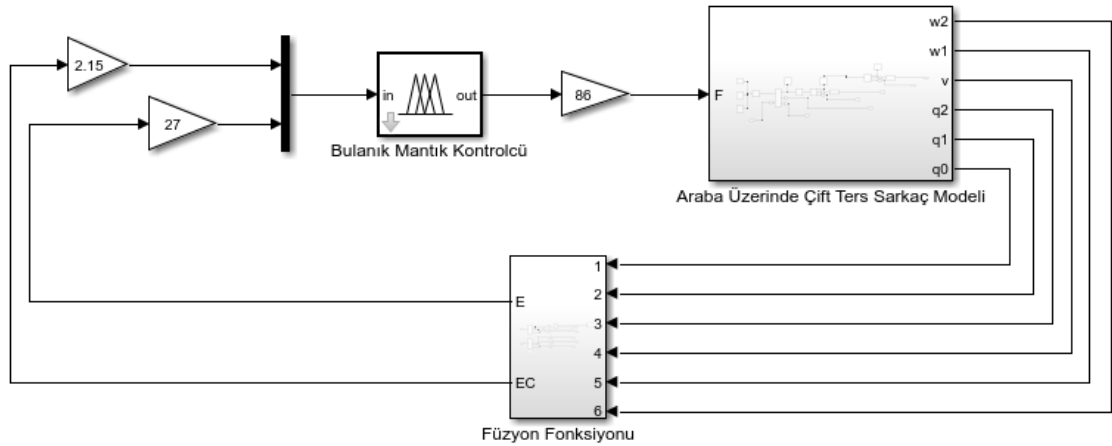
Şekil 16. Bulanık kontrolör çıkışı için MATLAB bulanık küme gösterimi.

Tez kapsamında kullanılan bulanık kontrol taban tablosu Tablo 5'te gösterilmiştir. Blok diyagramda kullanılan Bulanık mantık kontrol bloğunda bu tablodan yararlanılmıştır

Tablo 5. Tez Kapsamında Kullanılan Bulanık Kural Tabanı
(Luhao Wang ve Sheng, 2010)

<i>Hata/Hata Türevi</i>	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NM	NM	NS	Z
NM	NB	NB	NM	NM	NS	Z	PS
NS	NB	NM	NM	NS	Z	PS	PM
Z	NM	NM	NS	Z	PS	PM	PM
PS	NM	NS	Z	PS	PM	PM	PB
PM	NS	Z	PS	PM	PM	PB	PB
PB	Z	PS	PM	PM	PB	PB	PB

Çift ters çevrilmiş sarkacın bulanık kontrol sisteminin simulink gösterimi Şekil 17'de gösterilmektedir.



Şekil 17. Bulanık Mantık Uygulanan Sistemin Simulink Üzerinde Gösterimi

Çift ters çevrilmiş sarkaç, tipik bir tek girişli çok çıkışlı (SIMO) sistemdir, ters çevrilmiş sarkaç sisteminin doğrusal bir durum denklemi türetilmiştir ve bulanık denetleyici,

doğrusal kontrol teorisi ve bulanık denetleyici kullanılarak tasarlanmıştır. Çıkış lineer kontrolörleri, lineer entegre yapı fonksiyonunun, çift ters çevrilmiş sarkaç altı boyutlu durum değişkeninin E hatasına ve hata değişimi EC'nin özellikleriyle doğrudan entegre edilebilir.

Durum geri besleme matrisini K kullanarak aşağıdaki gibi bir durum fonksiyonu $F_1(x)$ oluşturulur. Mevcut durum geri besleme matrisine göre K; Denklem (117)'deki gibidir. Ardından aşağıdaki denklem (125)'de hesaplanır. Ardından $F_1(x)$ matrisi elde edilir.

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} k_1/k_5 & k_3/k_5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2/k_6 & k_4/k_6 & 1 \end{bmatrix} \quad (125)$$

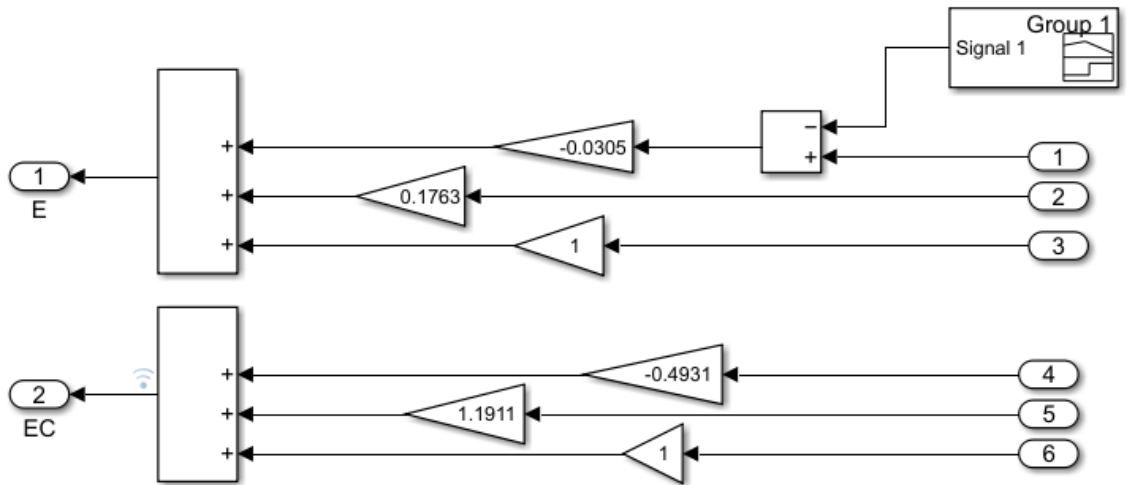
$$k_1/k_5 = -0,0304646588289641$$

$$k_3/k_5 = 0,17634136200987821$$

$$k_2/k_6 = -0,4930652925521668$$

$$k_4/k_6 = 1,191099538429481$$

$F_1(x)$ 'te bulunan bu katsayılar Şekil 18'deki gibi düzenlenmiş olan Füzyon Fonksiyonu alt-sisteminde kullanılmıştır.



Şekil 18. Füzyon Fonksiyonu Simulink Üzerinde Gösterimi

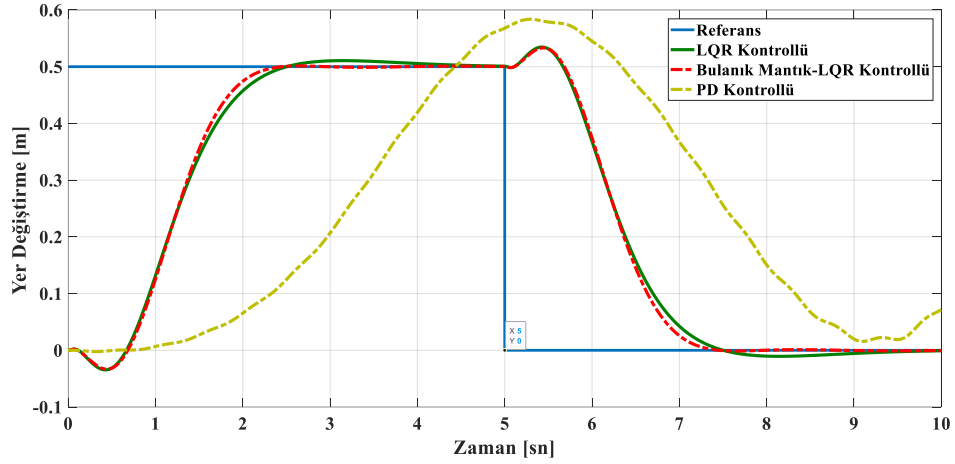
Altı boyutlu durum değişkenleri bir hata E ve hata varyasyonu EC'de birleşir (Lin Wang, Zheng, Wang ve Fan, 2010):

$$\begin{bmatrix} E \\ EC \end{bmatrix} = F_1(x)x^T \quad (126)$$

Kontrol uygulamaları bölümünde ters sarkaç, kütle merkezi dönme noktasının üzerinde olan kararsız ve ek yardım olmadan düşen bir sarkaçtır. Ters konumda olan bu sarkaçlar dirseğin açısını kontrol sistemi ile izlenir ve dengede tutmak için kontrol sistemiyle birlikte yatay kuvvet uygulanmaktadır. Ters çevrilmiş bir sarkaç doğası gereği kararsızdır ve dik kalabilmesi için aktif olarak dengelenmesi gerekir. Bu, pivot noktasına bir tork uygulayarak, bir geri besleme sisteminin parçası olarak pivot noktasını yatay olarak hareket ettirerek, pivot eksenine paralel bir eksenle sarkacın üzerine monte edilmiş bir kütlenin dönüş hızını değiştirerek ve böylece üreterek yapılabilir. Bu uygulamalar tez kapsamında kullanılan kontrolcüler geliştirilerek uygulanmaktadır.

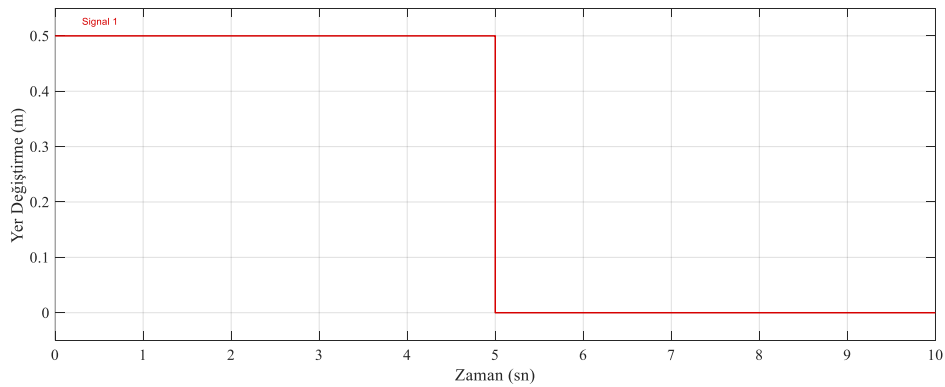
4.3. Kontrol Uygulamaları Sonrası Simulasyon Sonuçlarının Karşılaştırılması

Araç üzeri çift ters sarkaç sistemi multibody diagram üzerinde hazırlanmış olup; Matlab-Simulink'te oluşturulan kontrolcü sistemlerinin cevapları ve karşılaştırmaları gerçekleştirilmiştir. Araç konumu, araç hızı, sarkaçların dikeyle yaptığı açı ve bu sarkaçların açısal hızları 10 sn süre bandında bu bölümde gösterilen şekillerde çıkan grafiklerde karşılaştırılmıştır.

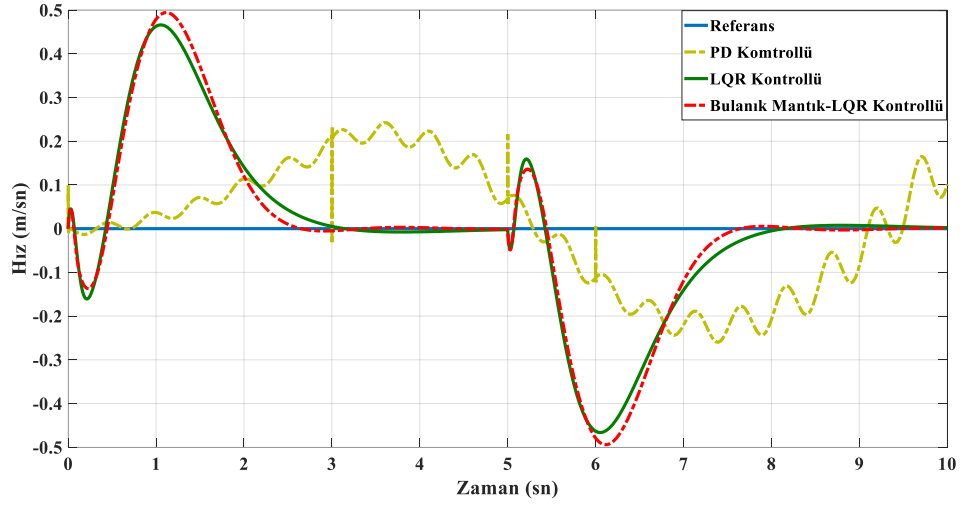


Şekil 19. Araç Yer Değiştirme-Zaman Grafiği

Sistemde bulunan aracın konumuna ait olan grafikte iki farklı konum verilmiştir. İlk 5 saniyede grafikte bulunan referans çizgisine göre il 5 saniye zaman diliminde referans konum 0,5 metredir ve bu verilen konuma araç gelmektedir. 5. Saniyeden 10. Saniyeye kadar olan zaman diliminde ise 0 konumuna dönüş yapması amaçlanmış olup kontrolcüler kullanılmıştır. İstenilen araç yer değiştirme sinyali Şekil 20'de verilmiştir.

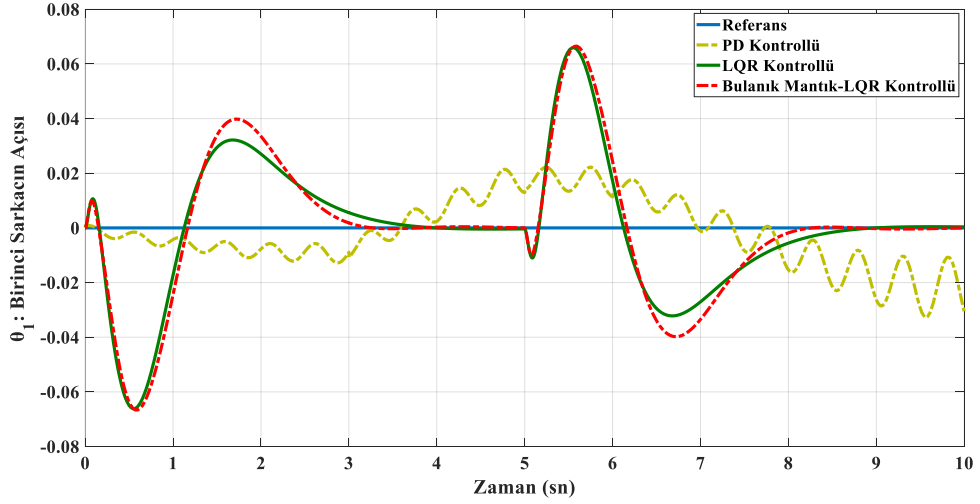


Şekil 20. Referans Araç Yer Değiştirme-Zaman Sinyal Grafiği



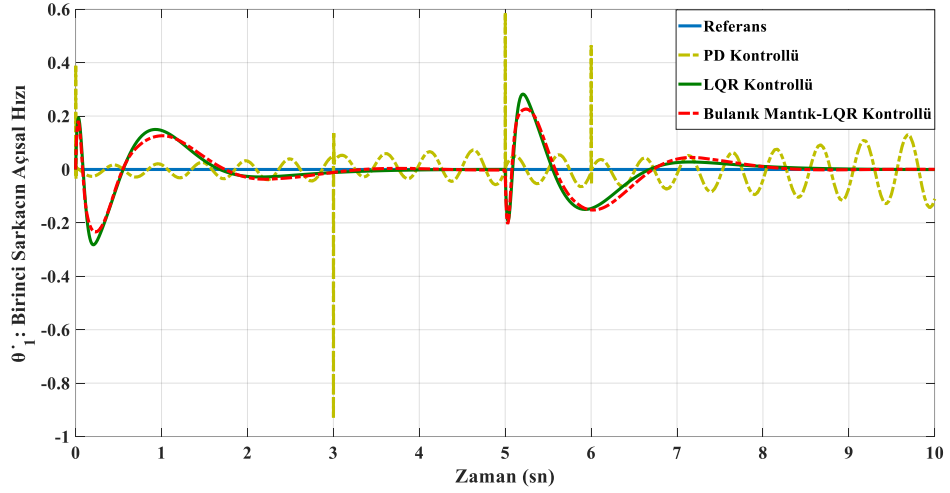
Şekil 21. Araç Hız-Zaman Grafiği

Bu verilen referans konumuna göre araç hareketinin sıfırlanması için kontrolcü uygulanmış olup; Şekil 21'de grafikteki gibi karşılaştırılmıştır. Buradan ele alınan cevaplara göre araç hızını ilk 5 saniyelik zaman diliminde PD kontrolcü sistemi ile sıfır referansına yaklaşırsa bile sistemden doğru cevap alınamamıştır. Bu zaman diliminde araç hızını ilk sıfırlayan sistem Bulanık-LQR kontrollü sistem olmuştur. Daha sonra araç başlangıç noktasına (0 metre) referans verilir ve sıfır noktasına vardığında araç hızını en hızlı düşüren kontrolcünün bulanık-LQR kontrollü sistem olduğu gözlenmiştir.



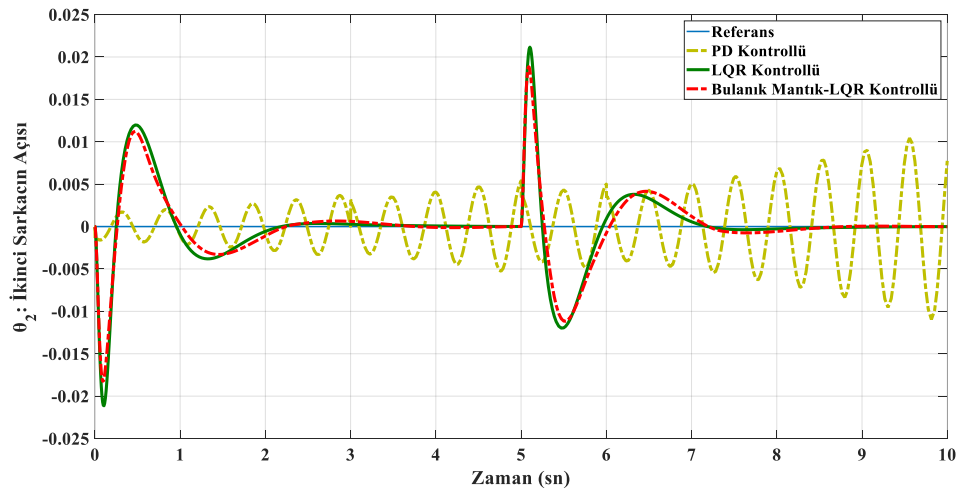
Şekil 22. İlk Sarkaç Açısı-Zaman Grafiği

Şekil 23'teki grafikte bu üç sistemin ilk sarkaçlarının açı cevapları karşılaştırılmıştır. PD kontrollü sistem cevabı doğru olmamıştır. İlk 5 saniye diliminde sarkaç açısını ilk sıfır yapan kontrolcü Bulanık-LQR kontrollü sistem olmuştur. Ardından araç 0 konumuna dönüş yaptığında da Bulanık-LQR kontrollü sistem önce olmak üzere LQR kontrollü sistem sıfır derece olan sarkaç açısı referansına ulaşmıştır.



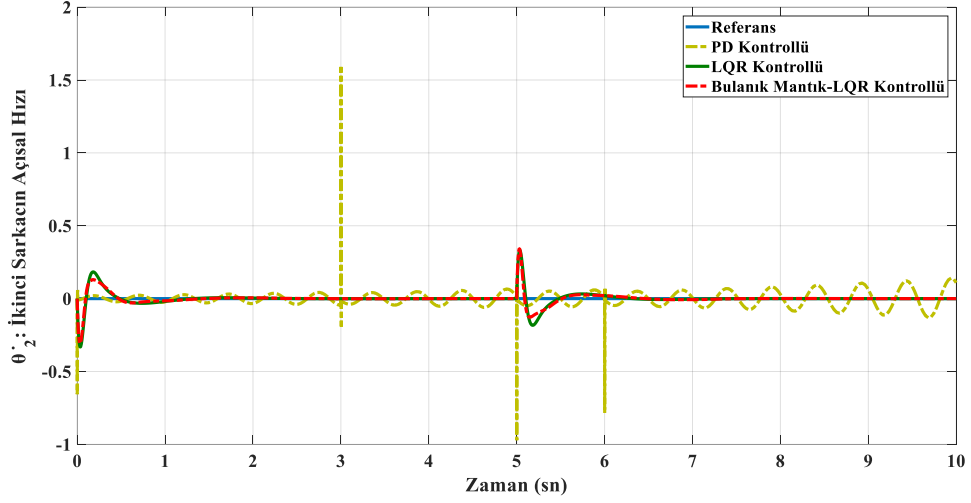
Şekil 23. İlk Sarkaç Açısal Hız-Zaman Grafiği

Şekil 17'de grafikte bu üç sistemin ilk sarkaçların açısal hız cevapları karşılaştırılmıştır. PD kontrollü sistem cevabı doğru olmamıştır. İlk 5 saniye zaman diliminde sarkaç açısal hızı ilk sıfıra yaklaşan LQR kontrollü sistem olmuştur. Ardından araç 0 konumuna dönüş yaptığında da LQR kontrollü sistem önce olmak üzere Bulanık-LQR kontrollü sistem sıfır derece sarkaç açısı referansına ulaşmıştır.



Şekil 24. İkinci Sarkaç Açısı-Zaman Grafiği

Şekil 24'deki grafikte bu üç sistemin ikinci sarkaçların açı cevapları karşılaştırılmıştır. PD kontrollü sistem cevabı doğru değildir. İlk 5 saniye zaman diliminde sarkaç açısı ilk sıfıra yaklaşan kontrollü sistem LQR kontrollü sistem olmuştur. Ardından araç 0 konumuna dönüş yaptığında da LQR kontrollü sistem önce olmak üzere Bulanık-LQR kontrollü sistem sıfır derece sarkaç açısı referansına ulaşmıştır.



Şekil 25. İkinci Sarkaç Açısal Hız-Zaman Grafiği

Şekil 25'teki grafikte bu üç sistemin ikinci sarkaçların açısal hız cevapları karşılaştırılmıştır. PD kontrollü sistem cevabı yanlış olup cevap dalga boyu farkı artmaktadır. 10 saniyelik zaman diliminde LQR kontrollü ve Bulanık-LQR kontrollü sistemler neredeyse aynı cevabı vermiştir ve 0 referans noktasına aynı zamanlarda ulaşmışlardır. Bu iki sistem arasındaki fark ise LQR kontrollü sistemin iki zaman dilimin başında ikinci sarkaç salınımı Bulanık-LQR kontrollü sisteme göre daha fazla olmuştur.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında bulunan sistem aracı referans girişine uygun şekilde yer değişikliği yapmakta ve araç üzerindeki sarkaçların dengede tutma kararlılığını sürdürmektedir. LQR, PD ve Bulanık-LQR kontrolcüler kullanılmış olup araç yer değişikliği, hızı ve sarkaçların açıları ile açısal hızları zamana bağlı değişim simülasyon grafiklerinde verilmiştir.

Çalışma kapsamında simülasyon uygulaması yapılan LQR, PD ve Bulanık-LQR kontrolcülü sistemler karşılaştırıldığında;

- PD Kontrolcü daha gürültülü bir sonuç vermiştir ve araca verilen konum referansına kararlı şekilde oturmamıştır. LQR ve Bulanık-LQR benzer cevapları vermiş olup Bulanık-LQR kontrollü sistem daha önce LQR kontrollü araçtan önce verilen referans konumuna ulaşmıştır.
- İlk sarkaç açısı ve hızı karşılaştırmasında verilen sıfır referansını ele alarak, Bulanık-LQR kontrollü sistem LQR kontrollü sisteme göre sıfıra daha önce ulaşmıştır. PD kontrollü sistem ise daha gürültülü sonuç vermiştir.
- İkinci sarkaç açısı ve hızı karşılaştırmasında verilen sıfır referansını ele alarak, LQR kontrollü sistem ve Bulanık-LQR kontrollü sistem benzer sonuçlar göstermiş olup ilk kuvvet verildiğinde Bulanık-LQR kontrolcünün cevabının peak noktası daha fazla olmuştur. PD kontrollü sistem ise daha gürültülü sonuç vermiştir ve grafikte çıkan sonuçta dalga boyu daha da artmıştır.

Elde edilen bu verilere dayanarak, Bulanık-LQR kontrolcünün LQR ve PD kontrolcüye göre daha doğru cevaplar verip kullanılabilir olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada araç üzeri çift ters sarkaç dereceli arabalı doğrusal ters sarkaç sisteminin denge problemi tasarlanan LQR, PD, Bulanık-LQR kontrolcülerin performansları MATLAB/Simulink ortamında yapılan bilgisayar simülasyon uygulamaları incelenmiştir. Sistemin matematiksel modeli, Newton metodu, Hamilton metodu gibi matematiksel yöntemlerle bulunabilir veya ADAMS, MATLAB-Simscape Multibody ve benzeri dinamik modelleme programları yardımı ile sistem giriş ve çıkışları farklı olabilecek şekilde modellenebilir. Sonuçlara göre sistemin kontrolü için farklı kontrolcü tasarımları uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- A. N. K. Nasir, M. A. A. and M. F. R. (2008). PERFORMANCE COMPARISON BETWEEN LQR AND PID CONTROLLERS FOR AN INVERTED PENDULUM SYSTEM. *AIP Publishing* içinde . Malaysia.
- Alwi, H., Edwards, C. ve Tan, C. P. (2009). Sliding mode estimation schemes for incipient sensor faults. *Automatica*, 45(7). doi:10.1016/j.automatica.2009.02.031
- Andrzejewski, K., Czyżniewski, M., Zielonka, M., Łangowski, R. ve Zubowicz, T. (2019). A comprehensive approach to double inverted pendulum modelling. *Archives of Control Sciences*, 29(3).
- Assidi, M. B. B. A. D. S. B. H. F. (2017). Simultaneous Actuator and Sensor faults tolerant control for uncertain linear Systems. IEEE.
- Ay, G. (2021, Mart). *BÜYÜK PATLAMA BÜYÜK ÇÖKÜŞ OPTİMİZASYON ALGORİTMASI İLE BULANIK PID KONTROLÖR TASARIMI VE ÇEYREK ARAÇ SÜSPANSİYON SİSTEMİNE UYGULANMASI*. KTO Karatay University, Konya.
- BIN NASIR, A. N. K. (2007). *Modelling and Controller Design For an Inverted Pendulum System*. UNIVERSITI TEKNOLOGI MALAYSIA, Malaysia.
- Bogdanov, A. (2004). Optimal control of a double inverted pendulum on a cart. *CSEE, OGI School of Science and Engineering*,
- Boubaker, O. ve Iriarte, R. (2017). *The inverted pendulum in control theory and robotics: From theory to new innovations. The Inverted Pendulum in Control Theory and Robotics*. doi:10.1049/PBCE111E
- ÇEVEN, S. ve ALBAYRAK, A. (2020). Çift Ters Sarkaç Sisteminin Kontrolü için PID ve LQR Kontrolcü Tasarımlarının Modellenmesi. *European Journal of Science and Technology*.
- Chen, W. J., Fang, L. ve Lei, K. K. (1998). Fuzzy logic controller for an inverted pendulum system. *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems, ICIPS* içinde (C. 1). doi:10.1109/icips.1997.672762
- Coşkun, S. (2020). Non-linear Control of Inverted Pendulum. *Çukurova University Journal of the Faculty of Engineering and Architecture*, 35(1).

- Dhahri, S., Sellami, A. ve Hmida, F. Ben. (2016). Fault detection and reconstruction via both full-order and reduced-order sliding mode observers for uncertain nonlinear systems. *Proceedings of 2015 7th International Conference on Modelling, Identification and Control, ICMIC 2015* içinde . doi:10.1109/ICMIC.2015.7409425
- Ding, S. X. (2009). Integrated design of feedback controllers and fault detectors. *Annual Reviews in Control*, 33(2). doi:10.1016/j.arcontrol.2009.08.003
- Gao, Z., Cecati, C. ve Ding, S. X. (2015). A survey of fault diagnosis and fault-tolerant techniques-part I: Fault diagnosis with model-based and signal-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. doi:10.1109/TIE.2015.2417501
- Hou, X., Zhang, N., Zheng, X. ve Xu, X. (2010). Study on swing-up control of linear spring-connected double inverted pendulum. *2010 Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2010* içinde .
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J. ve Maquin, D. (2009). Simultaneous state and unknown inputs estimation with PI and PMI observers for Takagi Sugeno model with unmeasurable premise variables. doi:10.1109/med.2009.5164566
- Introduction: PID Controller Design. (2017). *Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License*. 21 Temmuz 2022 tarihinde <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction§ion=ControlPID> adresinden erişildi.
- Isa, A. I., Hamza, M. F. ve Muhammad, M. (2019). Hybrid fuzzy control of nonlinear inverted pendulum system. *arXiv*.
- Jadlovská, S. ve Sarnovský, J. (2012). Classical double inverted pendulum - A complex overview of a system. *IEEE 10th Jubilee International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics, SAMI 2012 - Proceedings* içinde .
- Jadlovská, Slávka ve Sarnovský, J. (2013). Modelling of classical and rotary inverted pendulum systems - A generalized approach. *Journal of Electrical Engineering*, 64(1).
- Jeong, S. ve Takahashi, T. (2008). Wheeled inverted pendulum type assistant robot: Design concept and mobile control. *Intelligent Service Robotics*, 1(4). doi:10.1007/s11370-008-0024-5

- Jibril, M. T. M. D. R. (2020). Stability Control of Double Inverted Pendulum on a Cart using Full State Feedback with H infinity and H 2 Controllers.
- Kafetzis, I. ve Moysis, L. (2017). Inverted Pendulum : A system with innumerable applications Inverted Pendulum. *9th International Week Dedicated to Maths. Thessaloniki, Greece, March 2017.*, (February).
- Khosrowjerdi, M. J. ve Barzegary, S. (2014). Fault tolerant control using virtual actuator for continuous-time Lipschitz nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(16). doi:10.1002/rnc.3002
- Lee, D. J., Park, Y. ve Park, Y. S. (2012). Robust H_∞ sliding mode descriptor observer for fault and output disturbance estimation of uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(11). doi:10.1109/TAC.2012.2195930
- Liu, Y. ve Yu, H. (2013). A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory and Applications*, 7(7). doi:10.1049/iet-cta.2012.0505
- Lundberg, K. H. ve Barton, T. W. (2009). History of inverted-pendulum systems. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)* içinde (C. 8). doi:10.3182/20091021-3-jp-2009.00025
- Mohan, V., Rani, A. ve Singh, V. (2017). Robust adaptive fuzzy controller applied to double inverted pendulum. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 32(5).
- Mouna, A., Ali, B. B., Slim, D. ve Faycal, B. H. (2017). Sensor fault tolerant control for uncertain linear systems. *2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, STA 2016 - Proceedings* içinde . doi:10.1109/STA.2016.7952086
- Nesimioğlu, B. S., Yılmaz, S. ve Dincel, E. (2016). Robust Stabilization of a Servomechanism With Respect To Time-Delay. *International Journal of Applied Mathematics, Electronics and Computers*. doi:10.18100/ijamec.270376
- Ogata, K. (2009). *Modern Control Engineering Fifth Edition*. *IEEE Transactions on Automatic Control* (C. 17).
- Okubanjo, A. ve Oyetola, O. (2019). DYNAMIC MATHEMATICAL MODELING AND CONTROL ALGORITHMS DESIGN OF AN INVERTED PENDULUM

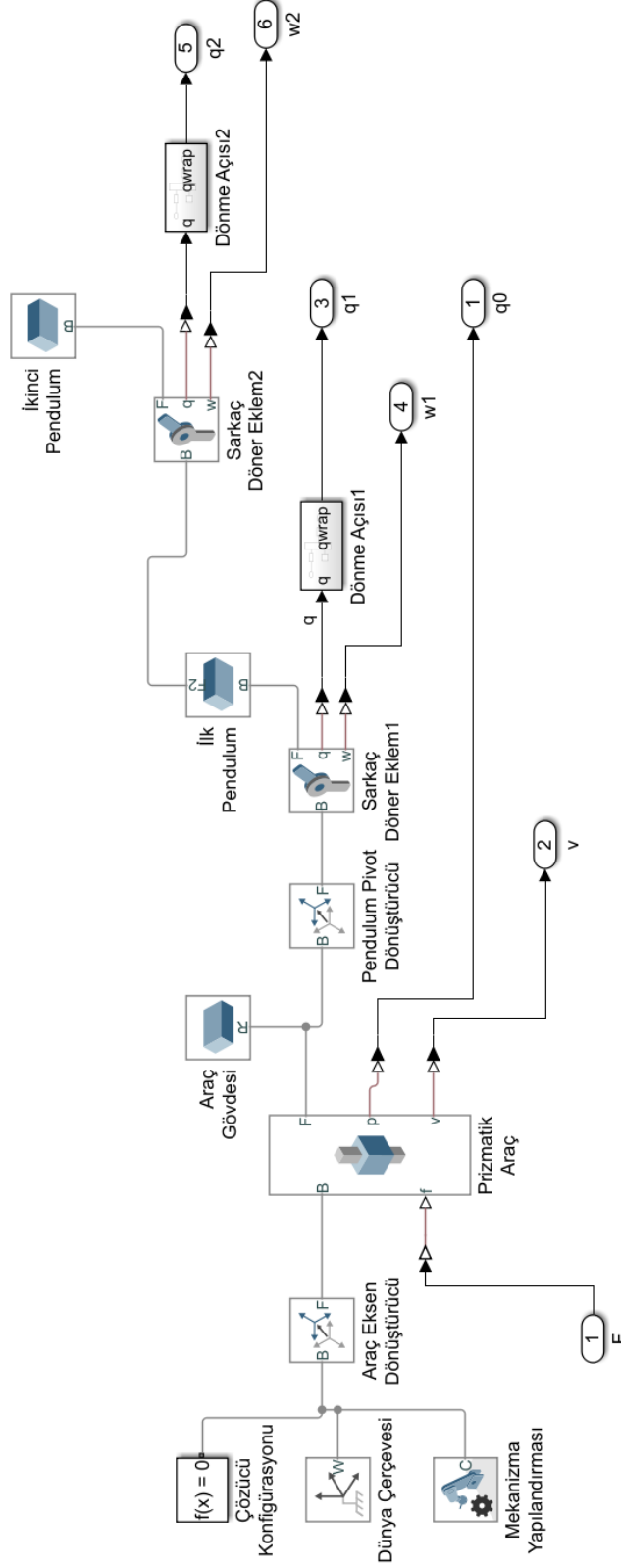
SYSTEM (IPS). *Turkish Journal of Engineering*.

- Önen, Ü., Çakan, A. ve İlhan, İ. (2019). Performance comparison of optimization algorithms in LQR controller design for a nonlinear system. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 27(3). doi:10.3906/elk-1808-51
- Özbey, A. (2006, Haziran). *TERS İKİLİ SARKACIN MODELLEME ve KONTROLÜ*.
- Peker, F. K. İbrahim. (2017). PID tip denetleyiciler kullanılarak yapılan bir ters sarkaç stabilizasyonunun performans analizi. *Mühendislik Dergisi*, 8.
- Raoufi, R., Marquez, H. J. ve Zinober, A. S. I. (2010). H_{∞} sliding mode observers for uncertain nonlinear Lipschitz systems with fault estimation synthesis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(16). doi:10.1002/rnc.1545
- Strakoš, P. ve Tůma, J. (2017). Mathematical modelling and controller design of inverted pendulum. *2017 18th International Carpathian Control Conference, ICCO 2017* içinde .
- Tinkir, M., Onen, U., Kalyoncu, M. ve Botsali, F. M. (2010). Pid and interval type-2 fuzzy logic control of double inverted pendulum system. *2010 The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering, ICCAE 2010* içinde (C. 1).
- Veluvolu, K. C. ve Soh, Y. C. (2011). Fault reconstruction and state estimation with sliding mode observers for Lipschitz non-linear systems. *IET Control Theory and Applications*, 5(11). doi:10.1049/iet-cta.2010.0171
- Wang, J. (2015). H_{∞} fault-tolerant controller design for networked control systems with time-varying actuator faults. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 11(4).
- Wang, Lin, Zheng, S., Wang, X. ve Fan, L. (2010). Fuzzy control of a double inverted pendulum based on information fusion. *Proceedings of 2010 International Conference on Intelligent Control and Information Processing, ICICIP 2010* içinde .
- Wang, Luhao ve Sheng, Z. (2010). LQR-Fuzzy control for double inverted pendulum. *Proceedings - 2010 International Conference on Digital Manufacturing and Automation, ICDMA 2010* içinde (C. 1).

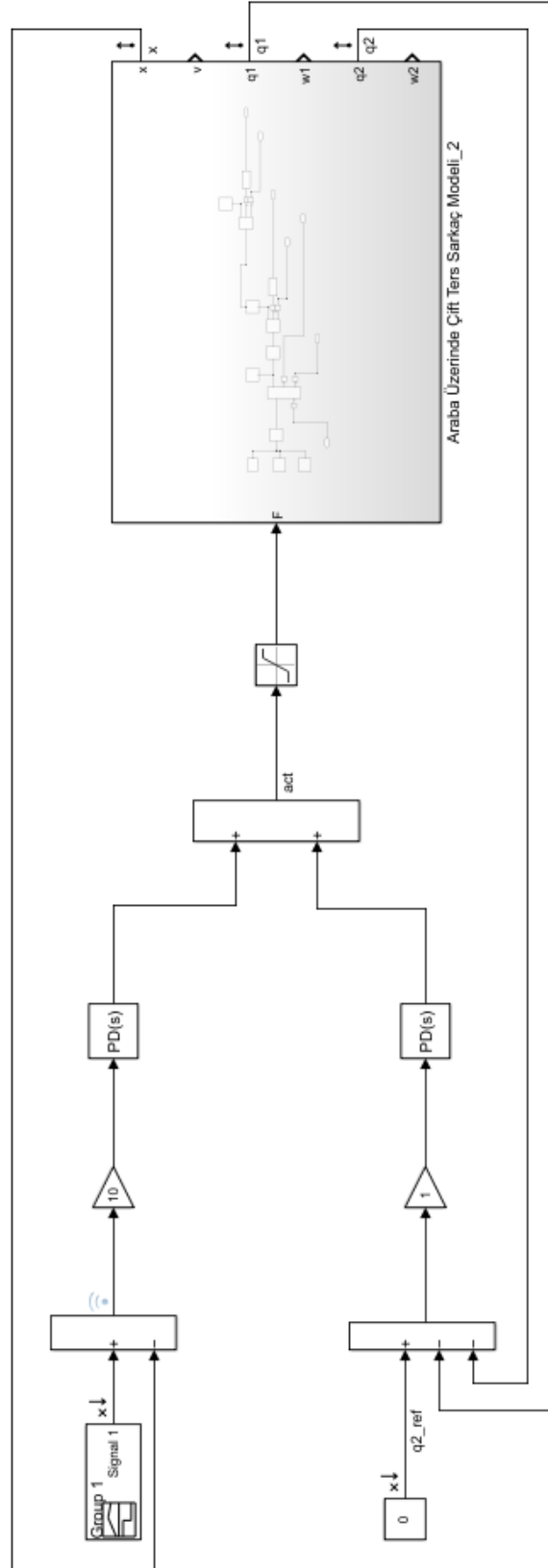
- Widnall, S. (2009). Lecture L20 - Energy Methods : Lagrange ' s Equations Derivation of Lagrange ' s Equations in Cartesian Coordinates. *Energy*, (3).
- Yang, J., Zhu, F. ve Sun, X. (2013). State estimation and simultaneous unknown input and measurement noise reconstruction based on associated observers. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 27(10). doi:10.1002/acs.2360
- Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences*, 8(3). doi:10.1016/0020-0255(75)90036-5
- Zare, A., Balochian, S., Arvan, M. R. ve Balochian, H. (2009). A new optimal control approach for Double Inverted Pendulum on Cart (DIPC). *2009 2nd International Conference on Computer, Control and Communication, IC4 2009* içinde .
- Zhang, K., Jiang, B. ve Staroswiecki, M. (2010). Dynamic output feedback fault tolerant controller design for Takagi-Sugeno fuzzy systems with actuator faults. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(1). doi:10.1109/TFUZZ.2009.2036005
- Zhao, Y., Lam, J. ve Gao, H. (2009). Fault detection for fuzzy systems with intermittent measurements. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(2). doi:10.1109/TFUZZ.2009.2014860

EKLER EK

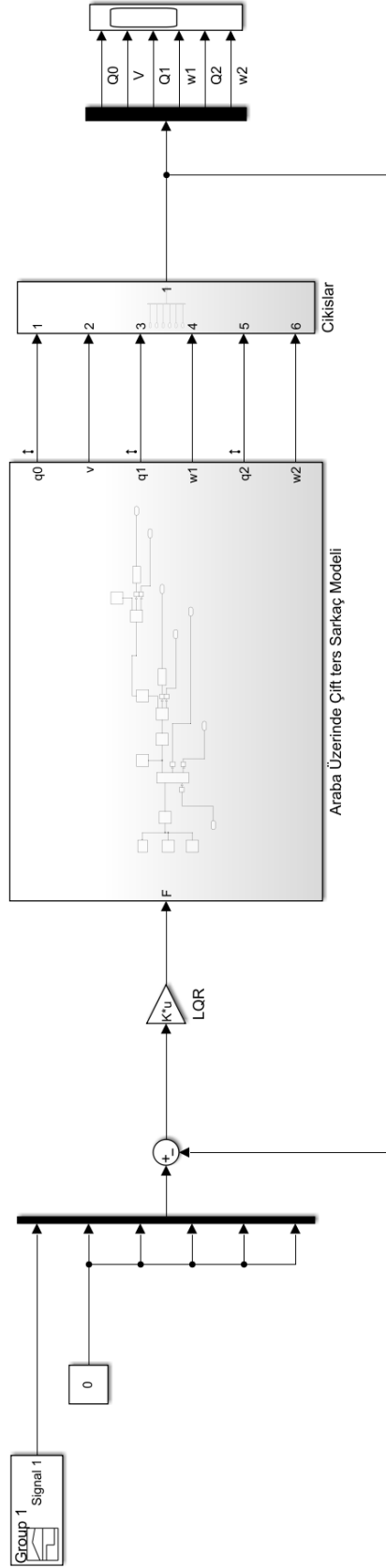
EK-1 PD Kontrolcü Yapısının Simulink Üzerinde Gösterimi



EK-2 PD Kontrolcü Yapısının Simulink Üzerinde Gösterimi



EK-3 LQR Kontrolcü Yapısının Simulink Üzerinde Gösterimi



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mürvet Şeyma Gören

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi :2018, KTO Karatay Üni., Müh. Fak., Mekatronik Müh.

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Stajlar : 2016, Stajyer Müh, TCDD YHT

2017, Stajyer Müh, HİLALSAN

Çalıştığı Kurumlar : 2018, LÜ Bursiyer, KTO Karatay Üniversitesi

2021, Araştırma Görevlisi, KTO Karatay Üniversitesi

Tarih: 25 Temmuz 2022